

## Nachklausur 10.6.2020

1. Eine Bahngesellschaft fährt die Fernstrecken mit vier Generationen Zügen: A, B, C und D. Die folgende Tabelle gibt an, wie viele Kompositionen der jeweiligen Generation im Einsatz sind, wie viele Sitzplätze diese haben und wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine Komposition pro Woche einen technischen Defekt hat und daher die Verbindung ausfällt.

	A	B	C	D
Stückzahl	50	40	80	70
Sitzplätze	700	400	450	300
Ausfallw'keit	20%	7%	4%	10%

Wir nehmen an, dass alle Züge gleich häufig zum Einsatz kommen und gleich stark ausgelastet sind. Sie hören von einer Person, die Sie nicht kennen (Gleichverteilung ihres Sitzplatzes), dass ihr Fernzug ausgefallen ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für A,B,C,D, dass der ausgefallene Zug zu dieser Generation gehört hat.

2. Betrachten wir (abhängige) 0-1-Experimente  $\{X_k\}$  mit der Verteilung

$$\mathbb{P}[A] = \int_0^1 \mathbb{P}_p[A] \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1} dp,$$

wobei  $a, b > 0$  und  $\mathbb{P}_p[A]$  die Wahrscheinlichkeit von  $A$  für unabhängige 0-1-Experimente mit  $\mathbb{P}_p[X_k = 1] = p$  ist. Wir bemerken, dass  $\mathbb{P}[\Omega] = 1$ .

- (3 Punkte) Bestimmen Sie  $\mathbb{P}[X_k = 1]$ .
  - (3 Punkte) Zeigen Sie, dass  $X_k$  und  $X_\ell$  ( $k \neq \ell$ ) abhängig sind.
  - (3 Punkte) Bestimmen Sie  $\mathbb{P}[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n]$ .
  - (3 Punkte) Bestimmen Sie  $\mathbb{P}[X_{n+1} = 1 \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n]$ .
3. Die gemeinsame Verteilung von  $X$  und  $Y$  sei

$$F(x, y) = \frac{(1 - e^{-x})(1 - e^{-y})}{1 - e^{-(x+y)}} \mathbb{1}_{x>0, y>0}.$$

- a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Randverteilungen.
- b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Verteilung absolutstetig ist.
- c) (6 Punkte) Bestimmen Sie die beste lineare Prognose von  $X$ , falls  $Y$  beobachtet wird.  
**Hinweis:** Es gilt  $\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{6}\pi^2 - 1 \approx 0.6449$ . (Müssen Sie nicht zeigen!)

4. Sei  $Z_1$  auf  $(0, 2)$  gleichverteilt. Die Variable  $Z_n$  ist bedingt auf  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}\}$  gleichverteilt auf  $(0, 2Z_{n-1})$ . Dann ist  $\mathbb{E}[Z_n \mid Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}] = Z_{n-1}$ . Diesen Prozess können wir folgendermassen definieren. Seien  $\{U_k\}$  unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen. Wir setzen  $Z_n = 2^n \prod_{k=1}^n U_k$ .

- a) (2 Punkte) Zeigen Sie, ohne den Wert  $\mathbb{E}[\log U_k] = -1$  zu verwenden, dass  $\mathbb{E}[\log U_k] < -\log 2$ .
- b) (5 Punkte) Schliessen Sie mit Hilfe des Gesetzes der grossen Zahl, dass  $Z_n$  fast sicher nach Null konvergiert.
- c) (5 Punkte) Es gilt  $\text{Var}[\log U_k] = 1$ . Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten Approximation, dass  $\mathbb{P}[Z_{100} \geq 1.53 \cdot 10^{-5}] \approx 0.025$ .

5. Bei der Pisa-Studie haben die deutschen Schüler im Fach Mathematik folgende Punktzahlen erreicht.

Jahr	2000	2003	2006	2009	2012	2015	2018
Punkte	490	503	504	513	514	506	500

Schätzen Sie die Punktzahl für die Studie 2021 mit Hilfe einer geeigneten Methode, wenn Sie davon ausgehen, dass die erreichten Punktzahlen einem Trend folgen und zufällig unabhängig und identisch verteilt davon abweichen.

6. Für eine psychologische Studie müssen die Probanden jeden Tag gewisse Übungen machen. Um den Effekt der Übungen nachzuweisen wird vor Anfang der Übungen und zum Abschluss je ein Test gemacht. Die Probanden haben in den Tests folgende Punktzahlen erreicht.

Proband	1	2	3	4	5	6
vorher	45	53	37	21	47	51
nachher	47	51	42	33	47	52

Testen Sie auf dem 5% Niveau, ob die Übungen eine Verbesserung bringen.

# Quantile der $t$ -Verteilung

$$\frac{\Gamma((\nu + 1)/2)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)} \int_{q(P)}^{\infty} \frac{1}{(1 + x^2/\nu)^{(\nu+1)/2}} dx = \frac{P}{100}.$$

$\nu \backslash P$	40	30	25	20	15	10	5	2.5	1	0.5	0.1	0.05
<b>1</b>	0.3249	0.7265	1.0000	1.3764	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.3	636.6
<b>2</b>	0.2887	0.6172	0.8165	1.0607	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.33	31.60
<b>3</b>	0.2767	0.5844	0.7649	0.9785	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.21	12.92
<b>4</b>	0.2707	0.5686	0.7407	0.9410	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
<b>5</b>	0.2672	0.5594	0.7267	0.9195	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
<b>6</b>	0.2648	0.5534	0.7176	0.9057	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
<b>7</b>	0.2632	0.5491	0.7111	0.8960	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
<b>8</b>	0.2619	0.5459	0.7064	0.8889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
<b>9</b>	0.2610	0.5435	0.7027	0.8834	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
<b>10</b>	0.2602	0.5415	0.6998	0.8791	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
<b>11</b>	0.2596	0.5399	0.6974	0.8755	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
<b>12</b>	0.2590	0.5386	0.6955	0.8726	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
<b>13</b>	0.2586	0.5375	0.6938	0.8702	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
<b>14</b>	0.2582	0.5366	0.6924	0.8681	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
<b>15</b>	0.2579	0.5357	0.6912	0.8662	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
<b>16</b>	0.2576	0.5350	0.6901	0.8647	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
<b>17</b>	0.2573	0.5344	0.6892	0.8633	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
<b>18</b>	0.2571	0.5338	0.6884	0.8620	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
<b>19</b>	0.2569	0.5333	0.6876	0.8610	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
<b>20</b>	0.2567	0.5329	0.6870	0.8600	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
<b>21</b>	0.2566	0.5325	0.6864	0.8591	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
<b>22</b>	0.2564	0.5321	0.6858	0.8583	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
<b>23</b>	0.2563	0.5317	0.6853	0.8575	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
<b>24</b>	0.2562	0.5314	0.6848	0.8569	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
<b>25</b>	0.2561	0.5312	0.6844	0.8562	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
<b>26</b>	0.2560	0.5309	0.6840	0.8557	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
<b>27</b>	0.2559	0.5306	0.6837	0.8551	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
<b>28</b>	0.2558	0.5304	0.6834	0.8546	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
<b>29</b>	0.2557	0.5302	0.6830	0.8542	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
<b>30</b>	0.2556	0.5300	0.6828	0.8538	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
<b>31</b>	0.2555	0.5298	0.6825	0.8533	1.055	1.310	1.696	2.040	2.453	2.745	3.375	3.633
<b>32</b>	0.2555	0.5297	0.6822	0.8530	1.054	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
<b>33</b>	0.2554	0.5295	0.6820	0.8526	1.053	1.308	1.692	2.034	2.445	2.733	3.356	3.611
<b>34</b>	0.2553	0.5294	0.6818	0.8523	1.052	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
<b>35</b>	0.2553	0.5292	0.6816	0.8520	1.052	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340	3.591
<b>36</b>	0.2552	0.5291	0.6814	0.8517	1.052	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
<b>37</b>	0.2552	0.5289	0.6812	0.8514	1.051	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326	3.574
<b>38</b>	0.2551	0.5288	0.6810	0.8512	1.051	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
<b>39</b>	0.2550	0.5287	0.6808	0.8509	1.050	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313	3.558
<b>40</b>	0.2550	0.5286	0.6807	0.8507	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
<b>50</b>	0.2547	0.5278	0.6794	0.8489	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
<b>60</b>	0.2545	0.5272	0.6786	0.8477	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
<b>80</b>	0.2542	0.5265	0.6776	0.8461	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
<b>100</b>	0.2540	0.5261	0.6770	0.8452	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
<b>120</b>	0.2539	0.5258	0.6765	0.8446	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373