Klausur 13.2.2023

1. Eine Motorfahrzeugversicherung hat drei Arten von Versicherten, A, B, und C. In der Tabelle ist der Anteil der jeweiligen Gruppe am Gesamtbestand gegeben. Die Anzahl Schäden pro Jahr sind für jeden dieser Versicherten sind jeweils Poisson verteilt mit einem von der Gruppe abhängigen Parameter λ.

	A	B	C
Anteil am Bestand	50	30	20
λ	0.1	0.2	0.5

Eine versicherte Person V wird zufällig (Gleichverteilung) aus dem Bestand ausgewählt.

a) (4 Punkte) Was ist der Erwartungswert der Anzahl Schäden im nächsten Jahr für V?

b) Berechnen Sie je die Wahrscheinlichkeiten, dass V zur Gruppe A, B, C gehört, falls im letzten Jahr

i) (4 Punkte) kein Schaden aufgetreten ist.

ii) (4 Punkte) genau ein Schaden aufgetreten ist.

2. Betrachten wir eine Irrfahrt $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Der Einfachheit halber erlauben wir, im Gegensatz zur Vorlesung, dass die Irrfahrt unendlich lange laufen kann; also $N = \infty$. Wir stoppen zur Zeit $T = \inf\{n : S_n = -1\}$, also das erste Mal, wenn die Irrfahrt ins Negative kommt. Wir interessieren uns für die Verteilung der Variable $M = \max\{S_n : n \le T\}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}[M = a] = 1/[(a+1)(a+2)]$ für $a \ge 0$ und schliessen Sie daraus, dass $\mathbb{E}[M] = \infty$.
Hinweis: Ruinproblem.

3. Seien T und S Zufallsvariablen mit Werten aus $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra. Für alle $t \in \mathbb{Q}$ gelte, dass $\{T \le t\} \in \mathfrak{A}$ und $\{S \le t\} \in \mathfrak{A}$. Zeigen Sie:

a) (1 Punkt) $\{t < T\} \in \mathfrak{A}$ für $t \in \mathbb{Q}$ und daher $\{T \le s\}$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

b) (3 Punkte) $\{\max\{T, S\} \le t\} \in \mathfrak{A}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

c) (3 Punkte) $\{\min\{T, S\} \leq t\} \in \mathfrak{A}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

d) (5 Punkte) $\{S + T > t\} \in \mathfrak{A}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Hinweis: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

4. Die gemeinsame Verteilung von X und Y sei

$$F(x, y) = \frac{(1 - x^{-3})(1 - y^{-4})}{1 - x^{-3}y^{-4}} \mathbb{I}_{x>1, y>1} ,$$

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Randverteilungen.

b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Verteilung absolutstetig ist.

c) (6 Punkte) Bestimmen Sie die beste lineare Prognose von X, falls Y beobachtet wird.
Hinweis: Es gilt $\mathrm{Cov}[XY] \approx 0.0624$. (Müssen Sie nicht zeigen!)

5. Sie finden folgende Zahlen zur Weltbevölkerung (in Milliarden):

Jahr	1927	1960	1974	1987	1999	2011
Menschen	2	3	4	5	6	7
$\log(\cdot)$	0.693	1.099	1.386	1.609	1.792	1.946

Da wir ein exponentielles Wachstum erwarten, logarithmieren wir die Bevölkerungszahlen, um ungefähr einen linearen Verlauf zu erhalten. Schätzen Sie die Weltbevölkerung im Jahr 2050 und das Jahr, in dem die 10 Milliardengrenze überschritten wird. Schätzen Sie weiter die Varianz des Fehlers (für die logarithmierten Daten).

6. Jemand behauptet, eine Verteilung sei symmetrisch. Sie glauben nicht daran. Um die Behauptung zu widerlegen, möchten Sie testen, ob der Mittelwert mit dem Median übereinstimmt. Aus Ihren Daten habe Sie den Mittelwert $\hat{\mu} = 0.949$ geschätzt. Sie stellen fest, dass 48 der Daten grösser sind als $\hat{\mu}$ und 67 der Daten kleiner sind als $\hat{\mu}$. Der Wert $\hat{\mu}$ tritt nicht auf. Sie wählen das Niveau 5%. Können Sie die Behauptung widerlegen, wenn Sie eine Normalapproximation für die Teststatistik verwenden?