

Lösung der Klausur

1. a) Die erwartete Anzahl Schäden in einer Gruppe ist jeweils λ . Dies ergibt für den Erwartungswert der Anzahl Schäden N

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N] &= \mathbb{P}[A]\mathbb{E}[N \mid A] + \mathbb{P}[B]\mathbb{E}[N \mid B] + \mathbb{P}[C]\mathbb{E}[N \mid C] \\ &= 0.5 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.5 = 0.21 .\end{aligned}$$

- b) i) Nach der Bayes-Formel wird

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A \mid N = 0] &= \frac{0.5 \cdot e^{-0.1}}{0.5 \cdot e^{-0.1} + 0.3 \cdot e^{-0.2} + 0.2 \cdot e^{-0.5}} = 0.552172 , \\ \mathbb{P}[B \mid N = 0] &= \frac{0.3 \cdot e^{-0.2}}{0.5 \cdot e^{-0.1} + 0.3 \cdot e^{-0.2} + 0.2 \cdot e^{-0.5}} = 0.299775 , \\ \mathbb{P}[C \mid N = 0] &= \frac{0.2 \cdot e^{-0.5}}{0.5 \cdot e^{-0.1} + 0.3 \cdot e^{-0.2} + 0.2 \cdot e^{-0.5}} = 0.148053 ,\end{aligned}$$

- ii) Nach der Bayes-Formel wird

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A \mid N = 1] &= \frac{0.5 \cdot 0.1 \cdot e^{-0.1}}{0.5 \cdot 0.1 \cdot e^{-0.1} + 0.3 \cdot 0.2 \cdot e^{-0.2} + 0.2 \cdot 0.5 \cdot e^{-0.5}} \\ &= 0.291848 , \\ \mathbb{P}[B \mid N = 1] &= \frac{0.3 \cdot 0.2 \cdot e^{-0.2}}{0.5 \cdot 0.1 \cdot e^{-0.1} + 0.3 \cdot 0.2 \cdot e^{-0.2} + 0.2 \cdot 0.5 \cdot e^{-0.5}} \\ &= 0.316890 , \\ \mathbb{P}[C \mid N = 1] &= \frac{0.2 \cdot 0.5 \cdot e^{-0.5}}{0.5 \cdot 0.1 \cdot e^{-0.1} + 0.3 \cdot 0.2 \cdot e^{-0.2} + 0.2 \cdot 0.5 \cdot e^{-0.5}} \\ &= 0.391263 ,\end{aligned}$$

2. Damit $M \geq a$, muss die Irrfahrt zuerst a erreichen, bevor sie -1 erreicht. Dies ist das Ruinproblem bei dem Spieler A Anfangskapital 1 und Spieler B Anfangskapital a hat. Aus dem Skript haben wir die Formel $\mathbb{P}[M \geq a] = |-1|/(a - (-1)) = 1/(a + 1)$. Daher haben wir

$$\mathbb{P}[M = a] = \mathbb{P}[M \geq a] - \mathbb{P}[M \geq a + 1] = \frac{1}{a + 1} - \frac{1}{a + 2} = \frac{1}{(a + 1)(a + 2)} .$$

Aus Hilfssatz 1.8 erhalten wir

$$\mathbb{E}[M] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[M > k] = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}[M \geq \ell] = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell+1} = \infty .$$

3. a) Da $\{T > t\} = \{T \leq t\}^c$, ist nach der Definition der σ -Algebra $\{T > t\} \in \mathfrak{A}$.
Da wir

$$\{T > s\} = \cup_{v \in (s, \infty) \cap \mathbb{Q}} \{T > v\}$$

schreiben können, ist $\{T > s\}$ eine abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathfrak{A}$ und damit in $\mathfrak{A}$.

- b) Dies folgt aus $\{\max\{T, S\} \leq t\} = \{T \leq t\} \cap \{S \leq t\}$.
c) Dies folgt aus $\{\min\{T, S\} \leq t\} = \{T \leq t\} \cup \{S \leq t\}$.
d) Wir schreiben

$$\{S + T > t\} = \cup_{s \in \mathbb{Q}} (\{S > s\} \cap \{T > t - s\}) .$$

Dies ist wieder eine abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathfrak{A}$ und damit in $\mathfrak{A}$.

4. a) Lassen wir y gegen Unendlich, so erhalten wir die Paretoverteilung $\mathbb{P}[X \leq x] = 1 - x^{-3}$, mit $x \rightarrow \infty$, die Paretoverteilung $\mathbb{P}[Y \leq y] = 1 - y^{-4}$.
b) Ableiten nach x gibt für $x, y > 1$

$$\frac{3x^{-4}(1 - y^{-4})}{1 - x^{-3}y^{-4}} - \frac{3x^{-4}y^{-4}(1 - x^{-3})(1 - y^{-4})}{(1 - x^{-3}y^{-4})^2} = \frac{3x^{-4}(1 - y^{-4})^2}{(1 - x^{-3}y^{-4})^2} .$$

Weiter ableiten nach y gibt

$$\begin{aligned} \frac{3x^{-2-1}8y^{-5}(1 - y^{-4})}{(1 - x^{-3}y^{-4})^2} - \frac{3x^{-4}8x^{-3}y^{-4}(1 - y^{-4})^2}{(1 - x^{-3}y^{-4})^3} \\ = \frac{24x^{-4}y^{-5}(1 - x^{-3})(1 - y^{-4})}{(1 - x^{-3}y^{-4})^3} . \end{aligned}$$

Somit ist die Verteilung absolutstetig mit der Dichte

$$f(x, y) = \frac{24x^{-4}y^{-5}(1 - x^{-3})(1 - y^{-4})}{(1 - x^{-3}y^{-4})^3} \mathbb{1}_{x>1, y>1} .$$

c) Die Dichte der Paretoverteilung ist $\alpha x^{-\alpha-1}$. Somit wird der Erwartungswert

$$\int_1^\infty x \alpha x^{-\alpha-1} dx = \alpha \int_1^\infty x^{-\alpha} dx = \frac{\alpha}{\alpha-1},$$

falls $\alpha > 1$. Das zweite Moment ist

$$\int_1^\infty x^2 \alpha x^{-\alpha-1} dx = \alpha \int_1^\infty x^{1-\alpha} dx = \frac{\alpha}{\alpha-2},$$

falls $\alpha > 2$. Also haben wir $\mathbb{E}[X] = 3/2$, $\mathbb{E}[Y] = 4/3$ und $\text{Var}[Y] = 2 - (4/3)^2 = 2/9$. Damit wird die Prognose

$$\hat{X} = 1.5 + \frac{0.0624}{2/9}(Y - 1.333) = 1.1256 + 0.2808Y.$$

5. Dies ist ein Problem für eine lineare Regression. Wir erhalten die Größen

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 X_k = 1976.33, & \bar{Y} &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 Y_k = 1.421, \\ \overline{XY} &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 X_k Y_k = 2819.69 & \overline{X^2} &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 X_k^2 = 3'906'649. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Schätzer

$$\hat{a} = \frac{\overline{XY} - \bar{X}\bar{Y}}{\overline{X^2} - \bar{X}^2} = 0.0147322, \quad \hat{b} = \bar{Y} - \hat{a}\bar{X} = -27.6946.$$

Für das Jahr 2050 erhalten wir die Prognose $\exp(\hat{a} \cdot 2050 - 27.6946) = 12.2597$, also eine Bevölkerung von 12.26 Milliarden. Die 10-Milliardengrenze wird geschätzt im Zeitpunkt $(\log(10) + 27.6946)/0.0147322 = 2036.17$, also im Jahr 2036 (oder 2037). Die Varianz wird mit der Formel aus der Vorlesung als 0.001523 geschätzt.

6. Die Hypothese ist "Mittelwert ist gleich dem Median". Wir verwenden den Vorzeichentest für den Median. Der kritische Bereich wird dann $K = \{|48 - 115/2| \geq c\} = \{9.5 \geq c\}$. Unter der Hypothese hat $\sum_{k=1}^{115} \mathbb{I}_{Y_k > 0.949}$ den Mittelwert 115/2 und die Varianz $115/4 = 28.75$. Wir können dies durch eine Normalverteilung approximieren. Somit wird $c = 1.96\sqrt{28.75} = 10.5093$. Dies liegt nicht im kritischen Bereich, so dass die Hypothese nicht widerlegt werden kann.