Lösung der Nachklausur

1. Die Wahrscheinlichkeit jeder Reihenfolge der Spieler ist 1/6. Die Wahrscheinlichkeiten als n-ter Spieler im ersten Versuch das Spiel zu gewinnen sind für C

n		Wahrscheinlichkeit
1.	:	$2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0.6 = 0.2,$
2.	:	$\frac{1}{6} \cdot (1-0.4) \cdot 0.6 + \frac{1}{6} \cdot (1-0.3) \cdot 0.6 = 0.13,$
3.	:	$2 \cdot \frac{1}{6} \cdot (1-0.4) \cdot (1-0.3) \cdot 0.6 = 0.084.$

Somit werden die bedingten Wahrscheinlichkeiten,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[C = \text{“1.”}] &= \frac{0.2}{0.2+0.13+0.084} = 0.4831\ ,\\ \mathbb{P}[C = \text{“2.”}] &= \frac{0.13}{0.414} = 0.3140\ ,\\ \mathbb{P}[C = \text{“3.“}] &= \frac{0.084}{0.414} = 0.2029\ .\end{aligned}$$

2. Spieler A gewinnt im n-ten Versuch, falls alle drei Spieler $n-1$-Mal keinen Erfolg hatten und A im n-ten Versuch Erfolg hat. Dass alle drei in einer Runde keinen Erfolg haben, passiert mit Wahrscheinlichkeit $0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.4 = 0.168$. Somit wird die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt,

$$\mathbb{P}[A \text{ gewinnt}] = \sum_{k=0}^{\infty} 0.168^k \cdot 0.4 = \frac{0.4}{1-0.168} = 0.4808\ .$$

Spieler B gewinnt im n-ten Versuch, falls alle drei Spieler $n-1$-Mal keinen Erfolg hatten, A im n-ten Versuch keinen Erfolg hat und B im n-ten Versuch Erfolg hat. Dies ergibt die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[B \text{ gewinnt}] = \sum_{k=0}^{\infty} 0.168^k \cdot 0.6 \cdot 0.3 = \frac{0.18}{1-0.168} = 0.2163\ .$$

Damit ergibt sich $\mathbb{P}[C \text{ gewinnt}] = 0.3029$. Für den erwarteten Gewinn müssen wir die Wahrscheinlichkeiten mit 100 € multiplizieren. Also sollten die Einsätze folgendermassen sein:

	A	B	C
Einsatz in Euro	48.08	21.63	30.29

3. **a)** 0 wird im Zeitpunkt n mit Wahrscheinlichkeit $1/n$ besucht und die Ereignisse $\{X_n = 0\}$ sind unabhängig. Da $1/n$ nicht summierbar ist, wird 0 nach Borel–Cantelli unendlich oft besucht.

b) m wird nach dem k-ten Besuch in 0 erreicht, falls $\cap_{i=1}^{m}\{X_{T_k+i} \neq 0\}$. Dies tritt, bedingt auf $\{T_k\}$, mit Wahrscheinlichkeit

$$\frac{T_k}{T_k+1} \cdot \frac{T_k+1}{T_k+2} \cdot \dots \cdot \frac{T_k+m-1}{T_k+m} = \frac{T_k}{T_k+m} > \frac{1}{m+1} \;,$$

da $T_k > T_1 \geq 2$. Da 0 unendlich oft besucht wird und $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(m+1) = \infty$, folgt nach Borel–Cantelli, dass auch m unendlich oft besucht wird.

4. **a)** Wir haben

$$\mathbb{P}[-\log(1-U) \leq x] = \mathbb{P}[U \leq 1 - \mathrm{e}^{x}] = 1 - \mathrm{e}^{-x} \;.$$

Somit ist X exponentialverteilt mit Parameter 1. Und

$$\mathbb{P}[-2\log U \leq y] = \mathbb{P}[U \geq \mathrm{e}^{-y/2}] = 1 - \mathrm{e}^{-y/2} \;.$$

Somit ist Y exponentialverteilt mit Parameter $\frac{1}{2}$.

b) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y] &= \mathbb{P}[U \leq 1 - \mathrm{e}^{-x}, U \geq \mathrm{e}^{-y/2}] \\ &= \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-y/2} \;, & \text{falls } \mathrm{e}^{-y/2} \leq 1 - \mathrm{e}^{-x}, \\ 0 \;, & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

Das heisst, $F(x,y) = \max\{1 - \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-y/2}, 0\}$.

c) Die Kovarianz wird

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[X,Y] &= \mathbb{E}[\log(1-U) 2 \log U] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\ &= 2\int_0^1 \log(1-u)\log u \,\mathrm{d}u - 1 \cdot 2 = 4 - \frac{\pi^2}{3} - 2 = 2 - \frac{\pi^2}{3} \;.\end{aligned}$$

Die Varianzen sind 1 und 4. Also erhalten wir die Korrelation

$$\mathrm{Cor}[X,Y] = \frac{2 - \frac{\pi^2}{3}}{\sqrt{4}} = 1 - \frac{\pi^2}{6} \approx -0.6449 \;.$$

Man bemerke, dass trotz perfekter (negativer) Abhängigkeit die Korrelation nicht -1 ist.

5. **a)** Der Momentenschätzer ist $\hat{\mu} = \mathbb{E}_\mu[X_k] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$.

b) Da $\lim_{\mu\to 0} f(x) = 0$, kann das Maximum nicht am Rand liegen. Die Log-Likelihoodfunktion ist

$$\ell(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^n \Big[-\frac{(1-\eta x_k)^2}{2x_k} - \tfrac{1}{2}\log(2\pi x_k^3)\Big] \;.$$

Ableiten nach η und Nullsetzen gibt

$$\frac{\mathrm{d}\ell(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}\eta} = \sum_{k=1}^n (1-\eta x_k) = n - \eta\sum_{k=1}^n x_k = 0 \;.$$

Somit erhalten wir den Maximum-Likelihood-Schätzer

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \;.$$

Da $\frac{\mathrm{d}^2\ell(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}\eta^2} = -\sum_{k=1}^n x_k < 0$, handelt es sich wirklich um ein Maximum, was nach Skript sowieso klar ist, wenn es nur eine Lösung gibt.

6. Wir haben 125 Beobachtungen. Für die vorgeschlagene Exponentialverteilung mit Mittelwert 3 und damit Parameter 1/3 haben wir $\mathbb{P}[a \le X < b] = \mathrm{e}^{-a/3} - \mathrm{e}^{-b/3}$. Also erwarten wir $125(\mathrm{e}^{-a/3} - \mathrm{e}^{-b/3})$ Beobachtungen im Intervall $[a, b)$, und damit

Intervall	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$	$[5,\infty)$
Beobachtet	30	34	16	10	7	28
Erwartet	35.43	25.39	18.19	13.04	9.34	23.61
Differenz	-5.43	8.61	-2.19	-3.04	-2.34	4.39

Wir erhalten die Teststatistik für den χ^2 Anpassungstest

$$T = \frac{5.43^2}{35.43} + \frac{8.61^2}{25.39} + \frac{2.19^2}{18.19} + \frac{3.04^2}{13.04} + \frac{2.34^2}{9.34} + \frac{4.39^2}{23.61} = 6.12684 \;.$$

Aus den Tabellen (6 Zellen = 5 Freiheitsgrade) finden wir den Beibehaltungsbereich $(0.8312, 12.833)$. Da T in diesem Bereich liegt, wird die Hypothese beibehalten. Wir können die Behauptung also nicht widerlegen. Alternativ könnten wir auch den einseitigen Test verwenden. Dann wird der kritische Bereich $(11.07, \infty)$. Auch in diesem Fall wird die Hypothese beibehalten.