

Klausur 23.2.2026

1. Eine grosse Firma kauft Glühbirnen von vier verschiedenen Anbietern. Die Anteile α_k der Birnen von Anbieter k fassen wir nun als Wahrscheinlichkeiten auf. Die Birnen haben verschiedene Wahrscheinlichkeiten p_k , dass die von der Firma gewünschte Mindestbrenndauer nicht eingehalten wird. In einem Raum sind gleichzeitig drei Birnen des *selben* Anbieters eingesetzt worden. Sie wollen beobachten, welche Birnen nach der Mindestbrenndauer noch intakt sind.

Anbieter	A	B	C	D
α_k	50%	25%	20%	5%
p_k	0.02	0.025	0.03	0.05

- a) (3 Punkte) Geben Sie einen passenden Wahrscheinlichkeitsraum für das oben beschriebene Experiment an.
- b) (9 Punkte) Sie beobachten, dass genau eine Glühbirne vorzeitig ausbrennt. Geben Sie für jeden Anbieter die Wahrscheinlichkeit an, dass die Birnen vom jeweiligen Anbieter stammen.
2. Drei Personen spielen ein Spiel, in dem sie ein Ziel treffen müssen. A trifft das Ziel mit Wahrscheinlichkeit $p_A = \frac{1}{4}$, B mit Wahrscheinlichkeit $p_B = \frac{1}{3}$ und C mit Wahrscheinlichkeit $p_C = \frac{1}{2}$. Zuerst darf A einen der Gegner herausfordern. Treffen beide, wird das Spiel wiederholt, bis mindestens einer der beiden nicht trifft. Trifft nur einer der beiden, scheidet der nicht-Treffende aus und die beiden verbliebenen Spieler machen den Sieger unter sich aus. Verpassen beide das Ziel, darf B einen Gegner auswählen und das Spiel geht analog weiter. Ist nach der Runde, in der C wählt, noch niemand ausgeschieden, darf wieder A einen Gegner bestimmen.
- a) (3 Punkte) Spielen Spieler i und j gegeneinander, bis einer ausscheidet oder bis beide das Ziel verpassen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler i ausscheidet? Mit welcher Wahrscheinlichkeit scheidet keiner der Spieler in dieser Runde aus?
- b) (2 Punkte) Sind nur noch Spieler i und j im Spiel, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler i das Spiel gewinnt?
- c) (7 Punkte) Es ist optimal, wenn Spieler A und Spieler B sich gegenseitig als Gegner wählen. Bestimmen Sie die optimale Wahl für Spieler C.

3. Die gemeinsame Verteilung der Variablen (X, Y) habe die Dichte

$$f(x, y) = (\theta + 1)(e^{\theta x} + e^{\theta y} - 1)^{-(\theta^{-1}+2)} e^{\theta(x+y)} \mathbb{I}_{(x,y) \in (0,\infty)^2}, \quad \theta > 0.$$

- a) (1 Punkt) Sind X und Y unabhängig. Geben Sie eine Begründung.
 - b) (6 Punkte) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y .
 - c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y .
 - d) (4 Punkte) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X gegeben $\{Y = y\}$.
4. Betrachten wir unabhängige $\{0, 1\}$ -Experimente mit Erfolgsparameter p . Sei N die Anzahl der Misserfolge bis zum zweiten Erfolg.
- a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Verteilung von N .
 - b) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass N die Verteilung einer exponentiellen Familie hat. Bestimmen Sie die Parameter der kanonischen Form und die Funktion $a(\eta)$ für die kanonischen Parameter.
 - c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die momentenerzeugende Funktion von N mit Hilfe der kanonischen Form und geben Sie diese auch mit dem Parameter p an.
5. Betrachten wir die diskrete Verteilung $p_k = \frac{1}{2}(k+2)(k+1)p^3(1-p)^k$ für $k = 0, 1, 2, \dots$
- a) (4 Punkte) Berechnen Sie den Erwartungswert.
Hinweis: Leiten Sie $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^3}{(1-p)^2} \{(1-p)x\}^{k+2}$ dreimal ab. Beachten Sie eventuell $\{(1-p)x\}^2 = \{1 - (1-p)x\}^2 - 2\{1 - (1-p)x\} + 1$.
 - b) (2 Punkte) Schätzen Sie p mit der Momentenmethode.
 - c) (6 Punkte) Schätzen Sie p mit der Maximum-Likelihood-Methode.
6. Ein Gebiet der Grösse 144 km^2 in London wurde in 576 gleich grosse Quadrate aufgeteilt und die im 2. Weltkrieg gefallenen (537) Bomben gezählt

Anzahl Bomben pro Quadrat	0	1	2	3	4	7
Anzahl Quadrate	229	211	93	35	7	1

Es wird vermutet, dass eine Bombe die Quadrate unabhängig von den restlichen Bomben mit identischer Wahrscheinlichkeit trifft.

- a) (2 Punkt) Wieso macht die Poisson-Approximation Sinn?
- b) (2 Punkte) Schätzen Sie den Poisson-Parameter.
- c) (8 Punkte) Testen Sie auf dem 5% Niveau, ob die Poisson-Verteilung mit Ihrem geschätzten Parameter zu den Daten passt. Rechnen Sie für die erwartete Anzahl mit einer Stelle nach dem Komma.

Obere Quantile der χ^2 -Verteilung

$$\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} \int_{q(P)}^{\infty} x^{\nu/2-1} e^{-x/2} dx = \frac{P}{100} .$$

$\nu \backslash P$	50	25	20	15	10	5	2.5	1	0.5	0.1
1	0.4549	1.3233	1.6424	2.0723	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794	10.827
2	1.3863	2.7726	3.2189	3.7942	4.6052	5.9915	7.3778	9.2104	10.597	13.815
3	2.3660	4.1083	4.6416	5.3170	6.2514	7.8147	9.3484	11.344	12.838	16.266
4	3.3567	5.3853	5.9886	6.7454	7.7794	9.4877	11.143	13.277	14.860	18.466
5	4.3515	6.6257	7.2893	8.1152	9.2363	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515
6	5.3481	7.8408	8.5581	9.4461	10.645	12.592	14.449	16.812	18.475	22.457
7	6.3458	9.0372	9.8032	10.748	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.321
8	7.3441	10.219	11.030	12.027	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	8.3428	11.389	12.242	13.288	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	9.3418	12.549	13.442	14.534	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	10.341	13.701	14.631	15.767	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	11.340	14.845	15.812	16.989	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.909
13	12.340	15.984	16.985	18.202	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.527
14	13.339	17.117	18.151	19.406	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.124
15	14.339	18.245	19.311	20.603	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.698
16	15.338	19.369	20.465	21.793	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	16.338	20.489	21.615	22.977	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.791
18	17.338	21.605	22.760	24.155	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	18.338	22.718	23.900	25.329	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.819
20	19.337	23.828	25.038	26.498	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.314
21	20.337	24.935	26.171	27.662	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.796
22	21.337	26.039	27.301	28.822	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	22.337	27.141	28.429	29.979	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	23.337	28.241	29.553	31.132	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558	51.179
25	24.337	29.339	30.675	32.282	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	52.619
26	25.336	30.435	31.795	33.429	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.051
27	26.336	31.528	32.912	34.574	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.475
28	27.336	32.620	34.027	35.715	37.916	41.337	44.461	48.278	50.994	56.892
29	28.336	33.711	35.139	36.854	39.087	42.557	45.722	49.588	52.335	58.301
30	29.336	34.800	36.250	37.990	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.702
31	30.336	35.887	37.359	39.124	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003	61.098
32	31.336	36.973	38.466	40.256	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328	62.487
33	32.336	38.058	39.572	41.386	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648	63.870
34	33.336	39.141	40.676	42.514	44.903	48.603	51.966	56.061	58.964	65.247
35	34.336	40.223	41.778	43.640	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275	66.619
36	35.336	41.304	42.879	44.764	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581	67.985
37	36.336	42.383	43.978	45.886	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883	69.346
38	37.335	43.462	45.076	47.007	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181	70.703
39	38.335	44.539	46.173	48.126	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476	72.055
40	39.335	45.616	47.269	49.244	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.403
50	49.335	56.334	58.164	60.346	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.660
60	59.335	66.981	68.972	71.341	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.608
70	69.334	77.577	79.715	82.255	85.527	90.531	95.023	100.43	104.21	112.32
80	79.334	88.130	90.405	93.106	96.578	101.88	106.63	112.33	116.32	124.84
90	89.334	98.650	101.05	103.90	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30	137.21
100	99.334	109.14	111.67	114.66	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17	149.45