

Lösung der Klausur

1. a) Wir können z.B. $\Omega = \{A, B, C, D\} \times \{0, 1\}^3$ wählen. Als $\mathcal{F}$ wählen wir die Potenzmenge von Ω . Die Gewichte der Wahrscheinlichkeitsfunktion sind dann

$$\mathbb{P}[\omega] = \alpha_{\omega_1} \prod_{\ell=2}^4 p_{\omega_1}^{\omega_\ell} (1 - p_{\omega_1})^{1-\omega_\ell}.$$

- b) Die Wahrscheinlichkeiten, dass genau eine Birne vorzeitig ausbrennt, sind $\tilde{p}_k = 3p_k(1 - p_k)^2$,

Anbieter	A	B	C	D
$\tilde{p}_k$	0.0576	0.0713	0.0847	0.1354

Nach der Formel von Bayes

$$P_k = \mathbb{P}[\omega_1 = k \mid \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 1] = \frac{\alpha_k \tilde{p}_k}{0.5\tilde{p}_A + 0.25\tilde{p}_B + 0.2\tilde{p}_C + 0.05\tilde{p}_D}$$

erhalten wir

Anbieter	A	B	C	D
P_k	0.4096	0.2534	0.2408	0.0962

2. a) Spieler i scheidet aus, wenn j in der ersten Runde trifft und i nicht, oder wenn beide treffen und er später in dieser Runde ausscheidet. Damit haben wir $\pi_i = (1 - p_i)p_j + p_i p_j \pi_i$, also $\pi_i = (1 - p_i)p_j / (1 - p_i p_j)$. Dass keiner ausscheidet passiert mit Wahrscheinlichkeit

$$1 - \frac{(1 - p_i)p_j}{1 - p_i p_j} - \frac{(1 - p_j)p_i}{1 - p_i p_j} = \frac{1 - p_i p_j - p_j - p_i + 2p_i p_j}{1 - p_i p_j} = \frac{(1 - p_i)(1 - p_j)}{1 - p_i p_j}.$$

- b) Spieler i gewinnt, wenn Spieler j sofort ausscheidet oder Spieler i später gewinnt. Also, $P_i = (1 - p_j)p_i + P_i(p_i p_j + (1 - p_i)(1 - p_j))$. Damit erhalten wir $P_i = p_i(1 - p_j) / (p_i + p_j - 2p_i p_j)$.

- c) Sei G_i die Wahrscheinlichkeit, dass C gewinnt falls i wählen darf. Wir verwenden die oben berechneten Wahrscheinlichkeiten. Ist A der letzte Gegner von C, so ist $P_C = 3/4$. Ist B der letzte Gegner, ist $P_C = 2/3$. Wählt Spieler C Spieler A als Gegner, scheidet er mit Wahrscheinlichkeit $p_C = 1/7$ aus und mit Wahrscheinlichkeit $3/7$ scheidet keiner aus. Wählt er Spieler B, ist die Wahrscheinlichkeit $p_C = 1/5$ und mit Wahrscheinlichkeit $2/5$ scheidet keiner aus. Spielen A und B gegeneinander, so scheidet A mit Wahrscheinlichkeit $3/11$ und B mit Wahrscheinlichkeit $2/11$ aus.

Betrachten wir den Fall, dass C Spieler A wählt. Um zu gewinnen, muss C entweder im ersten Spiel gewinnen oder beide treffen nicht und C gewinnt später; $G_C = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{7} G_A$. Analog erhalten wir die anderen Gleichungen, was das System

$$\begin{aligned} G_C &= \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{7} G_A \\ G_A &= \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{4} + \frac{6}{11} G_B \\ G_B &= \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{4} + \frac{6}{11} G_C \end{aligned}$$

gibt. Die Lösung ist

$$G_C = \frac{841}{1478} \approx 0.5690, \quad G_A = \frac{977}{1478}, \quad G_B = \frac{929}{1478}.$$

Im Fall, dass Spieler B gewählt wird, erhalten wir

$$\begin{aligned} G_C &= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{5} G_A \\ G_A &= \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{4} + \frac{6}{11} G_B \\ G_B &= \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{4} + \frac{6}{11} G_C \end{aligned}$$

Die Lösung ist

$$G_C = \frac{601}{1066} \approx 0.5638, \quad G_A = \frac{703}{1066}, \quad G_B = \frac{667}{1066}.$$

Die optimale Wahl ist also Spieler A. Spieler C will also gegen den leichteren Gegner spielen. Wir sehen, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit am grössten ist, wenn A beginnt. Es scheint also, dass C darauf hofft, dass A gegen B gewinnt.

3. a) Der Ausdruck $(e^{\theta x} + e^{\theta y} - 1)^{-(\theta^{-1}+2)}$ lässt sich nicht als Produkt schreiben $f_1(x)f_2(y)$ schreiben, was man auch sehen kann, da die Ableitung des Logarithmus z.B. nach x noch von y abhängt.

b) Für $x, y > 0$, $u = e^{\theta v}$, $z = e^{\theta w}$, $du = \theta e^{\theta v} dv$, $dz = \theta e^{\theta w} dw$,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (\theta + 1) \int_0^x \int_0^y (e^{\theta v} + e^{\theta w} - 1)^{-(\theta^{-1}+2)} e^{\theta(v+w)} dw dv \\ &= \frac{\theta + 1}{\theta^2} \int_1^{e^{\theta x}} \int_1^{e^{\theta y}} (u + z - 1)^{-(\theta^{-1}+2)} dz du \\ &= \frac{1}{\theta} \int_1^{e^{\theta x}} (u^{-(\theta^{-1}+1)} - (u + e^{\theta y} - 1)^{-(\theta^{-1}+1)}) du \\ &= 1 - (e^{\theta x})^{-\theta^{-1}} - (e^{\theta y})^{-\theta^{-1}} + (e^{\theta x} + e^{\theta y} - 1)^{-\theta^{-1}} \\ &= 1 - e^{-x} - e^{-y} + (e^{\theta x} + e^{\theta y} - 1)^{-\theta^{-1}}. \end{aligned}$$

c) Lassen wir $y \rightarrow \infty$ erhalten wir $F_X(x) = 1 - e^{-x}$ und analog $F_Y(y) = 1 - e^{-y}$. Also sind die Randverteilungen die Exponentialverteilung.

d) Nach der Formel für die bedingte Verteilung ergibt sich für $x > 0$

$$\begin{aligned} f_{X|Y=y}(x) &= \frac{(\theta + 1)(e^{\theta x} + e^{\theta y} - 1)^{-(\theta^{-1}+2)} e^{\theta(x+y)}}{e^{-y}} \\ &= (\theta + 1)(e^{\theta x} + e^{\theta y} - 1)^{-(\theta^{-1}+2)} e^{\theta x} e^{(\theta+1)y}. \end{aligned}$$

Somit wird die Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} F_{X|Y=y}(x) &= (\theta + 1)e^{(\theta+1)y} \int_0^x (e^{\theta v} + e^{\theta y} - 1)^{-(\theta^{-1}+2)} e^{\theta v} dv \\ &= \frac{\theta + 1}{\theta} e^{(\theta+1)y} \int_1^{e^{\theta x}} (u + e^{\theta y} - 1)^{-(\theta^{-1}+2)} du \\ &= e^{(\theta+1)y} [(e^{\theta y})^{-(\theta^{-1}+1)} - (e^{\theta x} + e^{\theta y} - 1)^{-(\theta^{-1}+1)}] \\ &= 1 - (e^{\theta(x-y)} + 1 - e^{-\theta y})^{-(\theta^{-1}+1)}. \end{aligned}$$

4. a) Damit $N = n$ müssen wir unter den ersten $n + 1$ Versuchen genau einen Erfolg haben und im $n + 2$ -ten Versuch einen Erfolg. Die Wahrscheinlichkeit ist also

$$p_n = \binom{n+1}{1} p^2 (1-p)^n = (n+1) p^2 (1-p)^n.$$

b) Die Wahrscheinlichkeit p_n lässt sich schreiben als

$$p_n = \exp\{n \log(1-p) + 2 \log p\} (n+1).$$

Der kanonische Parameter ist also $\eta = \log(1-p)$. Damit ist $p = 1 - e^\eta$. Für die Funktion a erhalten wir

$$a(\eta) = -2 \log p = -2 \log(1 - e^\eta).$$

c) Die momentenerzeugende Funktion ist

$$M_N(r) = e^{-2\{\log(1-e^{\eta+r})-\log(1-e^{\eta})\}} = \left(\frac{1-e^{\eta}}{1-e^{\eta+r}}\right)^2 = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^r}\right)^2.$$

5. a) Der Erwartungswert ist $\frac{1}{2}h'''(1)$ und $h(x) = \frac{p^3\{(1-p)x\}^2}{(1-p)^2(1-(1-p)x)}$. Dies schreiben wir als

$$\begin{aligned} & \frac{p^3}{(1-p)^2} \frac{\{1-(1-p)x\}^2 - 2\{1-(1-p)x\} + 1}{1-(1-p)x} \\ &= \frac{p^3}{(1-p)^2} \left(1 - (1-p)x - 2 + \frac{1}{1-(1-p)x}\right). \end{aligned}$$

Die dritte Ableitung ist $6p^3(1-p)(1-(1-p)x)^{-4}$. Somit ist der Erwartungswert $3(1-p)/p$.

- b) Für die Momentenmethode setzen wir $3(\hat{p}^{-1} - 1) = \hat{\mu}$, also $\hat{p} = \frac{3}{\hat{\mu}+3}$.

c) Der Log-Likelihood für die Daten $N_1, N_2, \dots, N_n$ ist

$$3n \log p + \log(1-p) \sum_{k=1}^n N_k + \sum_{k=1}^n \log\left(\frac{1}{2}(N_k+2)(N_k+1)\right).$$

Das Maximum wird durch $3n/p - \sum_{k=1}^n N_k/(1-p) = 0$ bestimmt. Wir bemerken, dass der Log-Likelihood an den Grenzen $-\infty$ ist; was zeigt, dass es sich wirklich um ein Maximum handelt (Für $\hat{\mu} = 0$ wird das Maximum bei $\hat{p} = 1$ angenommen). Der Schätzer ist somit $\hat{p} = \frac{3}{\hat{\mu}+3}$. Der Schätzer stimmt somit mit dem Momentenschätzer überein.

6. a) Es sind viele Quadrate und die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Quadrat getroffen wird ist klein ($1/576$).

b) Der Schätzer ist $\lambda = 537/576 \approx 0.9323$.

c) Wir machen ein χ^2 -Anpassungstest. Dann ist

Anzahl Bomben	0	1	2	3	≥ 4
Erwartete Quadrate	226.7	211.4	98.5	30.6	8.7
Beobachtete Quadrate	229	211	93	35	8

Wir erhalten die Teststatistik

$$T = \frac{2.3^2}{226.7} + \frac{(-0.4)^2}{211.4} + \frac{(-5.5)^2}{98.5} + \frac{4.4^2}{30.6} + \frac{(-0.7)^2}{8.7} = 1.0202.$$

Wir haben vier Freiheitsgrade. Der entsprechende Wert ist 9.48. Somit geben die Daten keinen Hinweis darauf, dass die Poisson-Verteilung falsch ist.