Klausur 27.7.2011

Bevor Sie beginnen, lesen Sie alle 6 Aufgaben durch. Sie können die Aufgaben in beliebiger Reihenfolge lösen. Beginnen Sie also mit der Aufgabe, die Ihnen am einfachsten scheint. Wenn Sie nicht mehr weiterkommen, lösen Sie eine andere Aufgabe oder Unteraufgabe. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt, um die Gefahr zu minimieren, dass ein Teil Ihrer Lösung übersehen wird. Schreiben Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen an. Geben Sie auch Zwischenrechnungen ab. Ein Resultat wird nur dann als richtig gewertet, wenn erkennbar ist, wie Sie das Resultat erhalten haben. Die Klausur umfasst 6 Aufgaben. Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.

Ihre handschriftlichen Notizen sind als Hilfsmittel erlaubt. Taschenrechner sind nicht erlaubt.

Viel Glück!

Aufg.	Punkte1	Punkte2	Zeichen	Aufg.	Punkte1	Punkte2	Zeichen
1				4			
2				5			
3				6			
Gesamt:				Note:			

1. Leiten Sie folgende Funktionen ab:

a) $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ , \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x+y) \\ \mathrm{e}^x \ln(y^2+1) \\ \cos(xy) \end{pmatrix} \ ,$$

b) $$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ , \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} yx^2 \\ x+y+z \end{pmatrix} \ ,$$

c) $$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ , \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \sin x + \cos y + \tanh z \ ,$$

d) $$g \circ f \ .$$

2. Sei die Funktion $g(x)$ definiert als positive Lösung der Gleichung

$$g(x)\mathrm{e}^{g(x)} - g(x) = x^2 \ .$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $h(y) = (y+1)\mathrm{e}^y - 1$ auf $[0, \infty[$ streng monoton ist.

b) Zeigen Sie, dass $g(x)$ wohldefiniert ist; d.h., dass die Funktion $g(x)$ auf einer geeigneten Menge existiert.

c) Zeigen Sie, dass $g(x)$ für $x \neq 0$ differenzierbar ist und bestimmen Sie $g'(x)$ für $x \neq 0$.

3. Gegeben sei die Funktion $f(x, y, z) = \tan(xyz)$ auf der Oberfläche der Kugel mit Radius 1.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x, y, z)$ wohldefiniert ist; d.h. auf der ganzen Kugeloberfläche definiert ist.

b) Bestimmen Sie die Punkte (auf der Kugeloberfläche), wo die Funktion ihr Maximum annimmt.

4. Wir betrachten die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{-|x|}$. Bestimmen Sie die Fourier-Reihendarstellung von $f(x)$ und bestimmen Sie, für welche Werte die Fourierreihe nach $f(x)$ konvergiert.

5. Gegeben sei die Oberfläche des Elipsoids $B = \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x^2+2y^2+3z^2 = 6\}$. Mit $\boldsymbol{\nu}$ bezeichnen wir die äussere Normale. Weiter gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + \tan(y/2) \\ \cos x + y + \sinh z \\ \sin x + \cosh y + 2z \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie den Fluss durch die Oberfläche

$$\int_B \boldsymbol{w} \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_B \boldsymbol{w}\boldsymbol{\nu} \,\mathrm{d}S .$$

Hinweis: Betrachten Sie $\int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ als Flächeninhalt des Kreises.

6. Sei $R > 1$ und $f : U_R(0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

a) Zeigen Sie, dass

$$\int_{|z|=1} (2 \pm [z + z^{-1}]) \frac{f(z)}{z} \,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(2f(0) \pm f'(0)) .$$

b) Leiten Sie folgende Gleichungen her:

$$\frac{4}{\pi}\int_0^\pi f(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}) \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta = 2f(0) + f'(0) ,$$
$$\frac{4}{\pi}\int_0^\pi f(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}) \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta = 2f(0) - f'(0) .$$