

Lösung der Klausur

1. Die Funktionen sind stetig partiell differenzierbar. Daher existieren alle Ableitungen.

a) Aus den partiellen Ableitungen erhalten wir

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ e^x \ln(y^2+1) & \frac{2ye^x}{y^2+1} \\ -y \sin(xy) & -x \sin(xy) \end{pmatrix}.$$

b) Wir erhalten

$$g'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Die Ableitung wird

$$h'(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin y & \frac{1}{\cosh^2(x)} \end{pmatrix}.$$

Zur Erinnerung, die Ableitung von $\tanh z$ ist

$$\left(\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}\right)' = \frac{(e^z + e^{-z})^2 - (e^z - e^{-z})^2}{(e^z + e^{-z})^2} = \frac{4}{(e^z + e^{-z})^2} = \frac{1}{\cosh^2(z)}.$$

Alternativ kann die Ableitung auch als $\frac{1}{\cosh^2(z)} = 1 - \tanh^2 z$ dargestellt werden.

d) Nach der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x, y) &= g'(f(x, y))f'(x, y) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \sin(x+y)e^x \ln(y^2+1) & \sin^2(x+y) & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ e^x \ln(y^2+1) & \frac{2ye^x}{y^2+1} \\ -y \sin(xy) & -x \sin(xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a &= 2 \sin(x+y) \cos(x+y) e^x \ln(y^2+1) + \sin^2(x+y) e^x \ln(y^2+1) , \\ b &= 2 \sin(x+y) \cos(x+y) e^x \ln(y^2+1) + \frac{2y \sin^2(x+y) e^x}{y^2+1} , \\ c &= \cos(x+y) + e^x \ln(y^2+1) - y \sin(xy) , \\ d &= \cos(x+y) + \frac{2ye^x}{y^2+1} - x \sin(xy) . \end{aligned}$$

2. a) Leiten wir $h(y)$ ab, erhalten wir $h'(y) = (y+2)e^y \geq 2$. Somit ist $h(y)$ streng wachsend und daher streng monoton.
- b) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto ye^y - y - x^2$. Dann ist $g(x)$ die positive Lösung von $f(x, g(x)) = 0$. Die Ableitung nach y ist $\frac{\partial f}{\partial y} = (y+1)e^y - 1 = h(y)$. Setzen wir $y = 0$, erhalten wir $\frac{\partial f}{\partial y} |_{y=0} = 0$. Da $h(y)$ streng wachsend ist, haben wir $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ für $y > 0$. Also ist $f(x, y)$ streng wachsend in y . Weiter divergiert $f(x, y)$ für $y \rightarrow \infty$ nach Unendlich. Für $x \geq 0$ ist $x^2 \geq 0$, und somit gibt es eine eindeutige Lösung der Gleichung $f(x, y) = 0$ für jedes x .
- c) Aus $f(x, 0) = -x^2$ folgt, dass $g(x) = 0$ nur für $x = 0$ möglich ist. Für $x \neq 0$ ist somit $g(x) > 0$ und damit $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$. Weiter ist $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist $g(x)$ differenzierbar, und damit

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{2x}{(g(x)+1)e^{g(x)} - 1} .$$

3. Die Kugeloberfläche ist durch $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gegeben. Insbesondere haben wir $\max\{|x|, |y|, |z|\} \leq 1$ und $|xyz| \leq 1 < \frac{\pi}{2}$. Somit ist $\tan(xyz)$ für alle x, y, z auf der Kugeloberfläche definiert. Da in $\mathbb{R}^3$ die Kugeloberfläche kompakt ist, muss das Maximum angenommen werden. Wir müssen daher die Extrema der Funktion

$$\tan(xyz) - \varepsilon(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

unter der Nebenbedingung finden. Ableiten ergibt die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} yz(1 + \tan^2(xyz)) - 2\varepsilon x &= 0 , \\ xz(1 + \tan^2(xyz)) - 2\varepsilon y &= 0 , \\ xy(1 + \tan^2(xyz)) - 2\varepsilon z &= 0 . \end{aligned}$$

Ist $\varepsilon = 0$, so muss $y = 0$ oder $z = 0$ oder $x = 0$ gelten. Der Wert an einer dieser Stellen wäre $\tan(xyz) = \tan 0 = 0$. Das gleiche gilt, wenn eine der Koordinaten 0 sind. Wir werden im Folgenden einen höheren Funktionswert finden.

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit x , die zweite mit y und die dritte mit z , erhalten wir

$$xyz(1 + \tan^2(xyz)) = 2\varepsilon x^2 = 2\varepsilon y^2 = 2\varepsilon z^2 .$$

Somit ist $x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{3}$. Da $\tan z \leq 0$ für $z \in [-1, 0]$, muss $xyz = 3^{-3/2}$ gelten, also wird das Maximum bei $\tan 3^{-3/2} \approx 0.194862$ angenommen. Dies ist wirklich der maximale Wert, da ein Maximum angenommen wird. Die Punkte, in denen der Wert angenommen wird sind $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^\top$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})^\top$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})^\top$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^\top$, also an vier Stellen.

4. Die Funktion f ist gerade. Somit sind die Fourierkoeffizienten

$$b_n = \int_{-1}^1 e^{-|x|} \sin(n\pi x) \, dx = \int_0^1 e^{-x} \sin(n\pi x) \, dx - \int_0^1 e^{-z} \sin(n\pi z) \, dz = 0 ,$$

($z = -x$) und

$$a_n = \int_{-1}^1 e^{-|x|} \cos(n\pi x) \, dx = 2 \int_0^1 e^{-x} \cos(n\pi x) \, dx .$$

Für das Integral erhalten wir mittel partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x} \cos(n\pi x) \, dx &= 1 - (-1)^n e^{-1} - n\pi \int_0^1 e^{-x} \sin(n\pi x) \, dx \\ &= 1 - (-1)^n e^{-1} - n^2 \pi^2 \int_0^1 e^{-x} \cos(n\pi x) \, dx . \end{aligned}$$

Lösen wir nach dem Integral auf, erhalten wir

$$\int_0^1 e^{-x} \cos(n\pi x) \, dx = \frac{1 - (-1)^n e^{-1}}{1 + n^2 \pi^2} .$$

Damit haben wir die Fourierreihendarstellung

$$e^{-|x|} = 1 - e^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{1 - (-1)^n e^{-1}}{1 + n^2 \pi^2} \cos(n\pi x) .$$

Da f stetig ist und $f(-1) = f(1)$ konvergiert die Reihe überall.

5. Aus dem Satz von Gauss folgern wir

$$\int_B \mathbf{w} \, d\mathbf{S} = \int_A \operatorname{div} \mathbf{w} \, dx ,$$

wobei $A = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 6\}$ der Ellipsoid ist. Wir erhalten $\operatorname{div} \mathbf{w} = 4$. Die Achsenlängen des Ellipsoids sind $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{3}$ und $2\sqrt{2}$. Damit ist das Volumen des Ellipsoids $\frac{4}{3}\pi\sqrt{6}\sqrt{3}\sqrt{2} = 8\pi$. Damit erhalten wir

$$\int_B \mathbf{w} \, d\mathbf{S} = 4 \cdot 8\pi = 32\pi .$$

Um das Volumen zu berechnen kann man auch Integrieren

$$\begin{aligned} & \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \int_{-\sqrt{3-x^2/2}}^{\sqrt{3-x^2/2}} \int_{-\sqrt{2-x^2/3-2y^2/3}}^{\sqrt{2-x^2/3-2y^2/3}} 1 \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \int_{-\sqrt{3-x^2/2}}^{\sqrt{3-x^2/2}} 2\sqrt{2-x^2/3-2y^2/3} \, dy \, dx \\ &= \sqrt{2/3} \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \int_{-\sqrt{3-x^2/2}}^{\sqrt{3-x^2/2}} 2\sqrt{3-x^2/2-y^2} \, dy \, dx \\ &= \sqrt{2/3} \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} (3-x^2/2)\pi \, dx = \sqrt{2/3}\pi[6\sqrt{6} - (\sqrt{6})^3/3] = 8\pi . \end{aligned}$$

6. a) Die Funktion hat Pole in $z = 0$. Da $f(z) = f(0) + f'(0)z + f''(0)\frac{z^2}{2} + \dots$, ist die Laurentreihenentwicklung

$$(2 \pm [z + z^{-1}])(f(0)z^{-1} + f'(0) + f''(0)\frac{z}{2} + \dots) = \pm \frac{f(0)}{z^2} + \frac{2f(0) \pm f'(0)}{z} + \dots .$$

Also ist das Residuum $2f(0) \pm f'(0)$. Aus dem Residuensatz folgt nun

$$\int_{|z|=1} (2 \pm [z + z^{-1}]) \frac{f(z)}{z} \, dz = 2\pi i (2f(0) \pm f'(0)) .$$

- b) Als Kurvenintegral erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_{|z|=1} (2 \pm [z + z^{-1}]) \frac{f(z)}{z} \, dz = \int_0^{2\pi} (2 \pm [e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}]) \frac{f(e^{i\vartheta})}{e^{i\vartheta}} i e^{i\vartheta} \, d\vartheta \\ &= 2i \int_0^{2\pi} (1 \pm \cos \vartheta) f(e^{i\vartheta}) \, d\vartheta = 4i \int_0^\pi (1 \pm \cos(2\theta)) f(e^{2i\theta}) \, d\theta \\ &= 4i \int_0^\pi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \pm [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta]) f(e^{2i\theta}) \, d\theta . \end{aligned}$$

Dies gibt die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\pi i (2f(0) + f'(0)) &= 8i \int_0^\pi f(e^{2i\theta}) \cos^2 \theta \, d\theta , \\ 2\pi i (2f(0) - f'(0)) &= 8i \int_0^\pi f(e^{2i\theta}) \sin^2 \theta \, d\theta . \end{aligned}$$

Teilen wir durch $2\pi i$, erhalten wir das gewünschte Resultat.