Lösung der Nachklausur

1. Die Funktionen sind stetig partiell differenzierbar. Daher existieren alle Ableitungen.

a) Aus den partiellen Ableitungen erhalten wir

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} y\cosh(xy) & x\cosh(xy) \\ \frac{e^x}{e^x+y^2} & \frac{2y}{y^2+e^x} \\ \frac{2x}{1+(x^2+y)^2} & \frac{1}{1+(x^2+y)^2} \end{pmatrix} .$$

b) Wir erhalten

$$g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & z & y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

c) Die Ableitung wird

$$h'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh y & \frac{1}{1+z^2} \end{pmatrix} .$$

d) Nach der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned}
&(g\circ f)'(x,y) = g'(f(x,y))f'(x,y) \\
&= \begin{pmatrix} 2\sinh(xy) & \arctan(x^2+y) & \ln(y^2+e^x) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\cosh(xy) & x\cosh(xy) \\ \frac{e^x}{e^x+y^2} & \frac{2y}{y^2+e^x} \\ \frac{2x}{1+(x^2+y)^2} & \frac{1}{1+(x^2+y)^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
a &= 2y\sinh(xy)\cosh(xy) + \frac{e^x \arctan(x^2+y)}{e^x+y^2} + \frac{2x\ln(y^2+e^x)}{1+(x^2+y)^2} , \\
b &= 2x\sinh(xy)\cosh(xy) + \frac{2y\arctan(x^2+y)}{y^2+e^x} + \frac{\ln(y^2+e^x)}{1+(x^2+y)^2} , \\
c &= y\cosh(xy) + \frac{e^x}{e^x+y^2} + \frac{2x}{1+(x^2+y)^2} , \\
d &= x\cosh(xy) + \frac{2y}{y^2+e^x} + \frac{1}{1+(x^2+y)^2} .
\end{aligned}$$

2. Wir suchen die Extremalstellen der Funktion

$$\sin(xyz) - \varepsilon(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1) \ .$$

Die Ableitung ergibt die Bedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= yz\cos(xyz) - 2\varepsilon x \ , \\ 0 &= xz\cos(xyz) - 4\varepsilon y \ , \\ 0 &= xy\cos(xyz) - 6\varepsilon z \ . \end{aligned}$$

Ist eine der Koordinaten 0, so ist $\sin(xyz) = 0$. Man sieht leicht, dass dies nicht das Maximum ist (was wir auch finden werden). Aus $|x|, |y|, |z| \leq 1$ folgern wir, dass $|xyz| \leq 1$, und damit ist $\cos(xyz) > 0$. Wir folgern, dass $\varepsilon \neq 0$. Multipizieren wir die erste Gleichung mit x, die zweite mit y und die dritte mit z, erhalten wir, dass

$$xyz\cos(xyz) = 2\varepsilon x^2 = 4\varepsilon y^2 = 6\varepsilon z^2 \ .$$

Das bedeutet, dass $x^2 = 2y^2 = 3z^3 = \frac{1}{3}$. Da $\sin x < 0$ für $x \in [-1, 0[$, muss also $xyz = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{3} = \frac{1}{9\sqrt{2}}$ gelten und das Maximum ist $\sin\frac{1}{9\sqrt{2}}$. Da die Oberfläche kompakt ist, muss das Maximum angenommen werden, und somit haben wir wirklich ein Maximum. Dies wird an den vier Punkten $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3})^\top$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{3})^\top$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{3})^\top$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3})^\top$ angenommen.

3. **a)** Die Ableitung von γ ist

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t(\sin t + \cos t + \cos t - \sin t) \\ e^t(\sin t - \cos t + \cos t + \sin t) \end{pmatrix} = 2e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \ .$$

Also ist $\|\dot\gamma(t)\| = 2e^t$. Für die Bogenlänge erhalten wir

$$L_\gamma = \int_0^{2\pi} 2e^t \, dt = 2e^t \,|_0^{2\pi} = 2(e^{2\pi} - 1) \ .$$

b) Die Bogenlänge des Stücks $\gamma([0, t])$ ist nach obiger Formel $2(e^t - 1)$. Wir benötigen die Parametrisierung nach der Bogenlänge $s = 2(e^t - 1)$, also $t = \ln(1 + s/2)$. Damit ist die Kurve

$$\chi : [0, 2e^{2\pi}] \to \mathbb{R}^2 \ , \ s \mapsto \begin{pmatrix} (1 + \frac{s}{2})(\sin(\ln(1 + s/2)) + \cos(\ln(1 + s/2))) \\ (1 + \frac{s}{2})(\sin(\ln(1 + s/2)) - \cos(\ln(1 + s/2))) \end{pmatrix} \ .$$

c) Der Tangentenvektor wird unter der Parametrisierung nach Bogenlänge

$$T(s) = \dot\chi(s) = \begin{pmatrix} \cos(\ln(1 + s/2)) \\ \sin(\ln(1 + s/2)) \end{pmatrix} \ .$$

(Dies kann man auch nachrechnen) Die Ableitung des Tangentenvektors ist

$$\dot{T}(s) = \frac{1}{s+2}\begin{pmatrix} -\sin(\ln(1+s/2)) \\ \cos(\ln(1+s/2)) \end{pmatrix} .$$

Dies ergibt die Krümmung

$$\kappa(s) = \|\dot{T}(s)\| = \frac{1}{s+2} .$$

4. Für die Koeffizienten erhalten wir

$$a_n = \int_{-1}^{1} \sin(\sqrt{2}x)\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x = 0 ,$$

da $\sin(\sqrt{2}x)$ eine ungerade Funktion ist. Weiter ist mit partieller Integration

$$\begin{aligned} b_k &= \int_{-1}^{1} \sin(\sqrt{2}x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{k\pi}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} \cos(\sqrt{2}x)\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2(-1)^k\frac{k\pi}{2}\sin(\sqrt{2}) + \frac{k^2\pi^2}{2}\int_{-1}^{1} \sin(\sqrt{2}x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^k k\pi\sin(\sqrt{2}) + \frac{k^2\pi^2}{2}b_k . \end{aligned}$$

Also ist

$$b_k = (-1)^{k+1}\frac{k\pi\sin(\sqrt{2})}{\frac{k^2\pi^2}{2}-1} = (-1)^{k+1}\frac{2k\pi\sin(\sqrt{2})}{k^2\pi^2-2} .$$

Wir erhalten die Fourierreihe

$$\sin(\sqrt{2}x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n\pi\sin(\sqrt{2})}{n^2\pi^2-2}\sin(k\pi x) .$$

Da die Funktion stetig ist, konvergiert die Fourierreihe an allen Stellen in $]-1,1[$ zum Wert $\sin(\sqrt{2}x)$. Da $f(1) = \sin(\sqrt{2}) = -\sin(-\sqrt{2}) = -f(-1) \neq 0$, konvergiert die Fouriereihe n den Rändern nach $\frac{1}{2}[\sin(\sqrt{2}) + \sin(-\sqrt{2})] = 0$.

5. Aus dem Satz von Gauss folgern wir

$$\int_B \boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_A \operatorname{div}\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}x ,$$

wobei $A = \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 2y^2 + z^2 \le 6\}$ der Ellipsoid ist. Wir erhalten $\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 3x^2 + 3y^2 - 9$. Wir suchen das Integral

$$\begin{aligned}
&\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_{-\sqrt{6-2(x^2+y^2)}}^{\sqrt{6-2(x^2+y^2)}} (3x^2 + 3y^2 - 9)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} 2(3(x^2+y^2) - 9)\sqrt{6 - 2(x^2+y^2)}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&\quad = -3 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} (\sqrt{6 - 2(x^2+y^2)})^3\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x\ .
\end{aligned}$$

Letzteres Integral ist ein Integral über einen Kreis mit Radius $\sqrt{3}$. Somit erhalten wir in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
-3 \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} (\sqrt{6-2r^2})^3 r\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}r &= -\frac{3\pi}{2} \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{6-2r^2})^3 4r\, \mathrm{d}r \\
&= -\frac{3\pi}{2} \int_0^6 v^{3/2}\, \mathrm{d}v = -\frac{3\pi}{5} 6^{5/2}\ .
\end{aligned}$$

6. Auf der reellen Achse ist der Integrand der Realteil von $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}$. Die Pole sind bei $\pm\mathrm{i}$. Wir haben $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)} = \mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Wir müssen daher über die obere Halbebene integrieren, so dass i umkreist wird. Zum Beispiel wählen wir den Integrationsweg von $-\rho$ bis ρ und dann über den Halbkreis mit Radius ρ. $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| = \mathrm{e}^{-y}$ ist dann durch 1 begrenzt. Den Nenner können wir durch

$$\left|\frac{1}{1+z^2}\right| = \frac{1}{|1+z^2|} \le \frac{1}{\rho^2 - 1}$$

abschätzen. Somit ist

$$\left| \int_{\substack{|z|=\rho \\ y \ge 0}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}\, \mathrm{d}z \right| \le \frac{\pi\rho}{1+\rho^2}\ ,$$

was für $\rho \to \infty$ verschwindet. Es bleibt das Residum in $z = \mathrm{i}$ zu bestimmen. Multiplikation mit $(z - \mathrm{i})$ gibt $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z+\mathrm{i}}$, was bei $z = \mathrm{i}$ das Residuum $\mathrm{e}^{-1}/(2\mathrm{i})$ ergibt. Wir erhalten somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}\, \mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{2\mathrm{e}\mathrm{i}} = \frac{\pi}{\mathrm{e}}\ .$$

Für den Realteil erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\mathrm{e}}\ .$$

Wir bemerken, dass der Integrand eine gerade Funktion ist. Somit ist

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\mathrm{e}}\ .$$

Zum gleichen Ergebnis kommt man bei Integration über das Rechteck mit Ecken $-\rho, \rho, \rho + \mathrm{i}\rho, -\rho + \mathrm{i}\rho$, wobei der Weg über die obere Halbebende Länge 4ρ hat.