

Klausur 15.2.2011

Bevor Sie beginnen, lesen Sie alle 6 Aufgaben durch. Sie können die Aufgaben in beliebiger Reihenfolge lösen. Beginnen Sie also mit der Aufgabe, die Ihnen am einfachsten scheint. Wenn Sie nicht mehr weiterkommen, lösen Sie eine andere Aufgabe oder Unteraufgabe. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt, um die Gefahr zu minimieren, dass ein Teil Ihrer Lösung übersehen wird. Schreiben Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen an. Geben Sie auch Zwischenrechnungen ab. Ein Resultat wird nur dann als richtig gewertet, wenn erkennbar ist, wie Sie das Resultat erhalten haben. Die Klausur umfasst 6 Aufgaben. Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.

Ihre handschriftlichen Notizen sind als Hilfsmittel erlaubt. Taschenrechner sind nicht erlaubt.

Viel Glück!

Aufg.	Punkte1	Punkte2	Zeichen	Aufg.	Punkte1	Punkte2	Zeichen
1				4			
2				5			
3				6			
Gesamt:				Note:			

1. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{e^{1 - \cos x} - 1} ,$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\frac{\pi}{2} - \arctan x \right] .$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} ,$

Leiten Sie die folgenden Funktionen für $x > 0$ ab:

d) $\sin(\arctan(\ln x)) ,$ f) $\sin((\cos x) + \ln x)$

e) $\frac{\sin(e^x)}{\arctan x} ,$

2. Bestimmen Sie folgende Integrale für $a > 0$:

a) $\int_0^a x \arctan x \, dx ,$

Hinweis: $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} .$

b) $\int_1^a \sin(\ln x) \, dx ,$

c) $\int_0^1 x^5 \sqrt{1-x^3} \, dx .$

3. Berechnen Sie:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n^2 + 5n + 4} ,$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-nx/2} .$

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren:

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^{n/2}} ,$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} .$

Hinweis: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e .$

4. Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\top} , \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{\top} , \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\top} ,$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\top} , \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\top} , \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{\top} .$$

- a) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ und $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ je eine Basis bilden.
- b) Bestimmen Sie die Matrix, die den Basiswechsel von der Basis $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ zur Basis $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ beschreibt.

5. a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$, wobei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie eine Basis des Bildraums $f(\mathbb{R}^3)$.

- b) Sei für $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\frac{1}{2} \sin \alpha & a \\ \sin \alpha & \frac{1}{2} \cos \alpha & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie a , b , c und d (es wird nur **eine** Lösung verlangt), so dass die Matrix orthogonal wird.

6. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

- a) $y' = 2xy \ln y$, $(y_0 > 1)$ c) $y'' + 2y' + 2y = 0$.
b) $y' = y \cos x + \sin x \cos x$,