Lösung der Klausur

1. a) Zähler und Nenner konvergieren gegen 0. Somit verwenden wir die Regel von L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{e^{1-\cos x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)e^{\sin x} - 1}{(\sin x)e^{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)e^{\sin x} - 1}{\sin x} ,$$

wobei wir die Kettenregel verwendet haben. Zähler und Nenner konvergieren immer noch nach 0. Eine weiter Anwendung der Regel von L'Hospital und der Ketten- und Produktregel gibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)e^{\sin x} - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos^2 x - \sin x)e^{\sin x}}{\cos x} = 1 .$$

Also haben wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{e^{1-\cos x} - 1} = 1 .$$

b) Auch hier konvergieren Zähler und Nenner nach 0. Durch die Anwendung der Regel von L'Hospital und der Kettenregel erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} .$$

Eine zweite Anwendung der Regel von L'Hospital (oder durch Verwendung des Resultates aus dem Buch) ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = -\tfrac{1}{2} .$$

c) Da $\arctan x$ gegen $\pi/2$ konvergiert, geht der erste Term nach Unendlich, der zweite nach 0. Also erhalten wir mit der Regel von L'Hospital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\Big[\frac{\pi}{2} - \arctan x\Big] &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-x^{-2}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{-2}+1} = 1 .\end{aligned}$$

d) Mit der Kettenregel erhalten wir

$$[\sin(\arctan(\ln x))]' = \cos(\arctan(\ln x))\frac{1}{1+(\ln x)^2}\frac{1}{x} \ .$$

e) Die Quotienten- und Kettenregel ergeben

$$\left[\frac{\sin(\mathrm{e}^x)}{\arctan x}\right]' = \frac{\cos(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{e}^x \arctan x - \sin(\mathrm{e}^x)\frac{1}{1+x^2}}{(\arctan x)^2} \ .$$

f) Mit der Kettenregel erhalten wir

$$[\sin((\cos x) + \ln x)]' = \cos((\cos x) + \ln x)\,(x^{-1} - \sin x) \ .$$

2. **a)** Um die Umkehrfunktion zu vereinfachen, setzen wir $f'(x) = x$ und $g(x) = \arctan x$. Dann ist $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ und $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Partielle Integration gibt

$$\int_0^a x \arctan x \ \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}a^2 \arctan a - \tfrac{1}{2}\int_0^a x^2 \frac{1}{1+x^2} \ \mathrm{d}x \ .$$

Das Integral können wir als

$$\int_0^a x^2 \frac{1}{1+x^2} \ \mathrm{d}x = \int_0^a 1 - \frac{1}{1+x^2} \ \mathrm{d}x = a - \arctan a$$

berechnen. Also haben wir

$$\int_0^a x \arctan x \ \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\big[(a^2+1)\arctan a - a\big] \ .$$

b) Um die Verknüpfung zu lösen, setzen wir $t = \ln x$, also $x = \mathrm{e}^t$. Dann ist $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t \ \mathrm{d}t$, und die Substitutionsregel ergibt

$$\int_1^a \sin(\ln x) \ \mathrm{d}x = \int_0^{\ln a} (\sin t)\mathrm{e}^t \ \mathrm{d}t \ .$$

Nun versuchen wir partielle Integration $f(t) = \mathrm{e}^t$ und $g(t) = \sin t$. Somit erhalten wir

$$\int_0^{\ln a} (\sin t)\mathrm{e}^t \ \mathrm{d}t = a\sin(\ln a) - \int_0^{\ln a} \mathrm{e}^t \cos t \ \mathrm{d}t \ .$$

Eine weitere partielle Integration mit $f(t) = \mathrm{e}^t$ und $\tilde{g}(t) = \cos t$ gibt

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln a} \mathrm{e}^t \cos t \ \mathrm{d}t &= a\cos(\ln a) - 1 + \int_0^{\ln a} \mathrm{e}^t \sin t \ \mathrm{d}t \\ &= a\cos(\ln a) - 1 + \int_1^a \sin(\ln x) \ \mathrm{d}x \ .\end{aligned}$$

Setzen wir die Lösungen zusammen, erhalten wir

$$\int_1^a \sin(\ln x)\ \mathrm{d}x = 1 + a[\sin(\ln a) - \cos(\ln a)] - \int_1^a \sin(\ln x)\ \mathrm{d}x\ .$$

Lösen wir nach dem Integral auf, erhalten wir

$$\int_1^a \sin(\ln x)\ \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\{1 + a[\sin(\ln a) - \cos(\ln a)]\}\ .$$

c) Machen wir die Substitution $v = 1 - x^3$, finden wir $\mathrm{d}v = -3x^2\ \mathrm{d}x$. Also haben wir

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^3}\ \mathrm{d}x &= \int_1^0 -\frac{1}{3}(1-v)\sqrt{v}\ \mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int_0^1 v^{1/2} - v^{3/2}\ \mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{3/2} - \frac{1}{5/2}\Big) = \frac{4}{45}\ .\end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass eine Stammfunktion von $v^{k/2}$ durch die Funktion $v^{(k+2)/2}/[(k+2)/2]$ gegeben ist.

3. a) Die Lösungen für $n^2 + 5n + 4 = 0$ sind -1 und -4. Daher finden wir

$$\frac{3}{n^2+5n+4} = \frac{3}{(n+1)(n+4)} = \frac{a}{n+1} - \frac{b}{n+4} = \frac{a(n+4) - b(n+1)}{(n+1)(n+4)}\ .$$

Die Gleichung $3 = a(n+4) - b(n+1)$ impliziert $a = b = 1$. Somit ist die Summe

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{3}{n^2+5n+4} = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3} - \frac{1}{m+4}\ .$$

Lassen wir $m \to \infty$, erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n^2+5n+4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}\ .$$

b) Die Reihe ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \mathrm{e}^{-nx/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x\mathrm{e}^{-x/2})^n = \frac{1}{1 - x\mathrm{e}^{-x/2}}\ ,$$

sofern $|x\mathrm{e}^{-x/2}| < 1$. Dies ist für $x \geq -0.703467$ (dieser Wert war nicht verlangt) der Fall.

c) Nach dem Quotientenkriterium betrachten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)^{(n+1)/2}}}{\frac{\mathrm{e}^n}{n^{n/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}}{\sqrt{n+1}(\frac{n+1}{n})^{n/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}}{\sqrt{(n+1)\mathrm{e}}} = 0 \, .$$

Somit ist die Reihe konvergent.

d) Wir haben $\sin\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} \geq \frac{5}{6n}$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6n} = \infty$, muss $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} = \infty$ gelten.

Alternativ, kann man das Integralkriterium verwenden. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} < \infty$ genau dann, wenn $\int_1^\infty \sin\frac{1}{x}\, \mathrm{d}x < \infty$. Nun kann man die Abschätzung von oben verwenden, oder das Integral zu berechnen versuchen. Mit $y = \frac{1}{x}$, also $x = \frac{1}{y}$ erhalten wir

$$\int_1^\infty \sin\frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 (\sin y)\frac{1}{y^2}\, \mathrm{d}y \, .$$

Mit partieller Integration ist dies

$$\int_0^1 (\sin y)\frac{1}{y^2}\, \mathrm{d}y = -\frac{\sin y}{y}\bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos y}{y}\, \mathrm{d}y \, .$$

Da $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, ist der erste Term endlich. Da aber $1/y$ nicht integrierbar ist, ist $\frac{\cos y}{y} \geq \frac{\cos 1}{y}$ auch nicht integrierbar. Somit konvergiert die Summe nicht.

4. a) Wir bestimmen

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1+0+0-0-0-1 = -2 \neq 0$$

und

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0+2+0-1-(-2)-0 = 3 \neq 0 \, .$$

Somit sind die Basen linear unabhängig. Da drei linear unabhängige Vektoren eine Basis bilden, ist die Aussage gezeigt.

b) Setzen wir

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad \tilde{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

so beschreibt $\boldsymbol{T}$ den Basiswechsel von $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ zur kanonischen Basis, und $\tilde{\boldsymbol{T}}$ den Basiswechsel von $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ zur kanonischen Basis. Also müssen wir $\tilde{\boldsymbol{T}}$ invertieren, um von der kanonischen Basis zur Basis $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ zu kommen. Nach der Regel von Cramer benötigen wir

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -2\,,\ \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\,,\ \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1\,,$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1\,,\quad \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1\,,\quad \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\,,$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1\,,\quad \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\,,\quad \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1\,,$$

Somit ist

$$\tilde{\boldsymbol{T}}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

Die zum Basiswechsel gehörende Matrix ist somit

$$\tilde{\boldsymbol{T}}^{-1}\boldsymbol{T} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} .$$

5. a) Die Bilder der kanonischen Basis sind die Spalten der Matrix. Da $\det \boldsymbol{A} = 0$ folgt, dass die Spalten linear abhängig sind. Da der erste Vektor in der x-y-Ebene liegt, sind die beiden ersten Spalten linear unabhängig. Somit ist

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

eine Basis von $f(\mathbb{R}^3)$. Dies lässt sich auch direkt nachprüfen.

$$c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 2c_1 + c_2 \\ c_1 \\ 2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat nur die Lösung $c_1 = c_2 = 0$.

b) Die Spalten müssen eine Orthonormalbasis bilden. Es folgt sofort, dass die ersten zwei Spalten orthogonal sind und die erste Spalte normiert ist. Der zweite Vektor auch normiert sein, also

$$1 = \frac{\sin^2\alpha}{4} + \frac{\cos^2\alpha}{4} + c^2 = \frac{1}{4} + c^2$$

gelten. Dies gibt die beiden Lösungen $c = \pm\sqrt{3/4}$. Wählen wir $c = \sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2$. Der dritte Vektor ist orthogonal zum ersten, wenn $a\cos\alpha + b\sin\alpha = 0$, also $a = -b\tan\alpha$. Um zum zweiten Vektor orthogonal zu sein, muss

$$0 = \frac{b}{2\cos\alpha}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + d\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{2\cos\alpha} + d\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

gelten. Somit erhalten wir $d = -\frac{b}{\sqrt{3}\cos\alpha}$. Die dritte Spalte muss normiert sein, also

$$1 = b^2\left[1 + \tan^2\alpha + \frac{1}{3\cos^2\alpha}\right] = \frac{4b^2}{3\cos^2\alpha} \ .$$

Also erhalten wir

$$b = \pm\frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{2} \ .$$

Die gesuchte Matrix ist (wenn wir die positive Lösung verwenden):

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\frac{1}{2}\sin\alpha & -\frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{2} \\ \sin\alpha & \frac{1}{2}\cos\alpha & \frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \ .$$

6. a) Wir trennen die Variablen

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{z\ln z}\,\mathrm{d}z = \int_{x_0}^{x} 2t\,\mathrm{d}t = x^2 - x_0^2 \ .$$

Im Integral auf der linken Seite machen wir die Substitution $v = \ln z$. Dann ist $\mathrm{d}v = z^{-1}\,\mathrm{d}z$, also

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{z\ln z}\,\mathrm{d}z = \int_{\ln y_0}^{\ln y} \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = \ln(\ln y) - \ln(\ln y_0) = \ln\frac{\ln y}{\ln y_0} \ .$$

Also ist

$$\frac{\ln y}{\ln y_0} = \mathrm{e}^{x^2 - x_0^2} \ ,$$

und somit

$$y = \exp\{(\ln y_0)\mathrm{e}^{x^2 - x_0^2}\} \ .$$

b) Dies ist eine (inhomogene) lineare Differentialgleichung. Die homogene Lösung finden wir durch Trennung der Variablen $\frac{1}{y_h}\,\mathrm{d}y_h = \cos x\,\mathrm{d}x$, also $y_h = C\mathrm{e}^{\sin x}$. Wir machen den Ansatz $y = C(x)\mathrm{e}^{\sin x}$. Dann ist die Gleichung $C'(x)\mathrm{e}^{\sin x} = \sin x\cos x$, also $C'(x) = \sin x\cos x\mathrm{e}^{-\sin x}$. Die spezielle Lösung ist also

$$\int \sin x\cos x\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \int v\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v = -(1+v)\mathrm{e}^{-v} = -(1+\sin x)\mathrm{e}^{-\sin x} \ ,$$

wobei wir die Substitution $v = \sin x$ verwendet haben. Die allgemeine Lösung wird somit

$$y = C\mathrm{e}^{\sin x} - (1 + \sin x) \ .$$

c) Wir machen den Ansatz $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Einsetzen in die Gleichung ergibt die Gleichung $(\lambda^2 + 2\lambda + 2)\mathrm{e}^{\lambda x} = 0$. Die Lösungen sind $\lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$. Somit wird die Lösung $y = (A\cos x + B\sin x)\mathrm{e}^{-x}$.

Für die Anfangswerte $y(0)$ und $y'(0)$ erhält man die Lösung (ist nicht nötig für die Klausur)

$$y(x) = [y(0)\cos x + (y(0) + y'(0))\sin x]\mathrm{e}^{-x}\ .$$