Nachklausur 29.3.2011

Bevor Sie beginnen, lesen Sie alle 6 Aufgaben durch. Sie können die Aufgaben in beliebiger Reihenfolge lösen. Beginnen Sie also mit der Aufgabe, die Ihnen am einfachsten scheint. Wenn Sie nicht mehr weiterkommen, lösen Sie eine andere Aufgabe oder Unteraufgabe. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt, um die Gefahr zu minimieren, dass ein Teil Ihrer Lösung übersehen wird. Schreiben Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen an. Geben Sie auch Zwischenrechnungen ab. Ein Resultat wird nur dann als richtig gewertet, wenn erkennbar ist, wie Sie das Resultat erhalten haben. Die Klausur umfasst 6 Aufgaben. Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.

Ihre handschriftlichen Notizen sind als Hilfsmittel erlaubt. Taschenrechner sind nicht erlaubt.

Viel Glück!

Aufg.	Punkte1	Punkte2	Zeichen	Aufg.	Punkte1	Punkte2	Zeichen
1				4			
2				5			
3				6			
Gesamt:				Note:			

1. **a)** Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3} \ .$$

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\ln x}}{(x+1)^{\ln(x+1)}} \ .$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\mathrm{e}^x - 1)}{x \arctan x} \ .$$

2. Bestimmen Sie folgende Integrale für $0 < a \leq 1$:

a) $$\int_0^a 6x^2 \arcsin x \, \mathrm{d}x \ ,$$

b) $$\int_a^1 \frac{2\ln(\tan x)}{\sin x \cos x} \, \mathrm{d}x \ ,$$

c) $$\int_0^a \sqrt{\frac{\arccos\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}} \mathrm{e}^{-\sqrt{\arcsin x}} \, \mathrm{d}x \ .$$

3. Berechnen Sie:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+4}{n^3+3n^2+2n} \ ,$$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)n!} \ .$$

Hinweis: Ableitung einer Reihe.

Untersuchen Sie, ob die folgende Reihe konvergiert:

c) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{1+\ln(\ln n)}}{n(\ln n)|\ln(\ln n)|^{3/2}} \ ,$$

4. Seien die Vektoren $\boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \ .$$

Der Vektorraum V sei aufgespannt durch $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$. In $\mathbb{R}^4$ ist weiter die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \ , \ (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Dimension des Raumes V.

b) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ von V.

c) Sei $W = \operatorname{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ und $f : W \to \mathbb{R}^4$ die Einschränkung von g auf W. Welche Matrix beschreibt die Abbildung f, wenn auf W die Basis $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ und auf $\mathbb{R}^4$ die kanonische Basis gegeben ist.

5. Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ Matrix, die einen reellen Eigenwert λ hat, aber nicht diagonalisierbar ist. Sei

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ ähnlich sind.

6. a) Lösen Sie für $x \neq 0$ die Differentialgleichung

$$y' = \frac{\sin(x)\cos^2(xy) - y}{x} .$$

b) Lösen Sie das System

$$y_1' = y_1 5/4 + y_2\sqrt{3}/4 , \qquad y_2' = y_1\sqrt{3}/4 + y_2 7/4 .$$