

Lösung der Nachklausur

1. a) Wir können mit vollständiger Induktion vorgehen. Für $n = 1$ ist die linke Seite 1, die rechte Seite $1 \cdot 3/3 = 1$. Somit gilt die Formel für $n = 1$. Nehmen wir an, die Formel gilt für n . Dann ist für $n + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 + (2n+1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3} + (2n+1)^2 \\ &= (2n+1) \frac{n(2n-1) + 3(2n+1)}{3} = (2n+1) \frac{2n^2 + 5n + 3}{3} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} = \frac{(n+1)(4n^2 + 8n + 3)}{3} \\ &= \frac{(n+1)(4(n+1)^2 - 1)}{3}. \end{aligned}$$

Somit gilt die Formel auch für $n + 1$. Aus der vollständigen Induktion folgt, dass die Formel für alle n gilt.

Alternativ, kann man die Formel $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ verwenden. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{2n+1} k^2 - \sum_{k=1}^n (2k)^2 \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6} - 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(2n+1)[(4n+3) - 2(n+1)]}{3} = \frac{n(2n+1)(2n+1)}{3} \\ &= \frac{n(4n^2-1)}{3}. \end{aligned}$$

- b) Wir schreiben

$$\frac{x^{\ln x}}{(x+1)^{\ln(x+1)}} = \frac{e^{(\ln x)^2}}{e^{(\ln(x+1))^2}} = e^{-[(\ln(x+1))^2 - (\ln x)^2]}.$$

Der Exponent ist

$$(\ln(x+1))^2 - (\ln x)^2 = (\ln(x+1) + \ln x)(\ln(x+1) - \ln x) = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{\frac{1}{\ln(x+1) + \ln x}}.$$

Da $\ln(x+1) - \ln x = \ln \frac{x+1}{x}$, konvergieren Zähler und Nenner nach 0. Mit der Regel von Hôpital erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1) - \ln x}{\frac{1}{\ln(x+1) + \ln x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x+1) + \ln x)^2}{2x+1}.$$

Da x stärker wächst als $\ln x$, konvergiert letzterer Ausdruck nach 0. Damit gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\ln x}}{(x+1)^{\ln(x+1)}} = e^0 = 1.$$

- c) Da $e^x \rightarrow 1$, konvergiert $e^x - 1$ nach Null und damit $\cos(e^x - 1)$ nach 1. Somit konvergieren Zähler und Nenner nach 0. Mit der Regel von Hôpital erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(e^x - 1)}{x \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin(e^x - 1)}{\arctan x + \frac{x}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1)}{\arctan x + \frac{x}{1+x^2}}.$$

Da $\arctan 0 = 0$ und $\sin(e^x - 1)$ nach 0 konvergiert, müssen wir nochmals die Regel von Hôpital anwenden

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1)}{\arctan x + \frac{x}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos(e^x - 1)}{\frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Also ist der gesuchte Grenzwert $\frac{1}{2}$.

2. a) Um die Umkehrfunktion zu vereinfachen, setzen wir $f'(x) = 6x^2$ (also $f(x) = 2x^3$) und $g(x) = \arcsin x$. Partielle Integration ergibt

$$\int_0^a 6x^2 \arcsin x \, dx = 2a^3 \arcsin a - \int_0^a \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Wir setzen nun $z = 1 - x^2$, also $dz = -2x \, dx$. Dann wird

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx &= \int_{1-a^2}^1 \frac{1-z}{\sqrt{z}} \, dz = (2\sqrt{z} - \frac{2}{3}z^{3/2}) \Big|_{1-a^2}^1 \\ &= \frac{4}{3} - 2\sqrt{1-a^2} + \frac{2}{3}(\sqrt{1-a^2})^3. \end{aligned}$$

Zusammensetzen der Integrale gibt

$$\int_0^a 6x^2 \arcsin x \, dx = 2a^3 \arcsin a - \frac{4}{3} + 2\sqrt{1-a^2} - \frac{2}{3}(\sqrt{1-a^2})^3.$$

- b) Da wir $y = \tan x$ setzen wollen, brauchen wir die Ableitung $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$. Also

$$\begin{aligned} \int_a^1 \frac{2 \ln(\tan x)}{\sin x \cos x} \, dx &= \int_a^1 \frac{2 \ln(\tan x)}{\tan x \cos^2 x} \, dx = \int_{\tan a}^{\tan 1} \frac{2 \ln y}{y} \, dy \\ &= (\ln \tan 1)^2 - (\ln \tan a)^2. \end{aligned}$$

c) Setzen wir zuerst $x = \sin v$, also $v = \arcsin x$. Dann ist $dx = \cos v \, dv$. Also

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{\frac{\arccos \sqrt{1-x^2}}{1-x^2}} e^{-\sqrt{\arcsin x}} dx \\ &= \int_0^{\arcsin a} \sqrt{\frac{\arccos \sqrt{1-\sin^2 v}}{1-\sin^2 v}} e^{-\sqrt{v}} \cos v \, dv \\ &= \int_0^{\arcsin a} \frac{\sqrt{\arccos \cos v}}{\cos v} e^{-\sqrt{v}} \cos v \, dv = \int_0^{\arcsin a} \sqrt{v} e^{-\sqrt{v}} \, dv, \end{aligned}$$

wobei wir $\cos^2 v = 1 - \sin^2 v$ verwendet haben, und $\sqrt{\cos^2 v} = \cos v$, da $\cos v \geq 0$ im betrachteten Bereich. Wir wählen nun $t = \sqrt{v}$, also $v = t^2$ und $dv = 2t \, dt$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{\frac{\arccos \sqrt{1-x^2}}{1-x^2}} e^{-\sqrt{\arcsin x}} dx &= \int_0^{\arcsin a} \sqrt{v} e^{-\sqrt{v}} \, dv \\ &= \int_0^{\sqrt{\arcsin a}} t e^{-t} 2t \, dt = 2 \int_0^{\sqrt{\arcsin a}} 2t e^{-t} \, dt - 2(\arcsin a) e^{-\sqrt{\arcsin a}} \\ &= 4 \int_0^{\sqrt{\arcsin a}} t e^{-t} \, dt - 4\sqrt{\arcsin a} e^{-\sqrt{\arcsin a}} - 2(\arcsin a) e^{-\sqrt{\arcsin a}} \\ &= 4 - (4 + 4\sqrt{\arcsin a} + 2\arcsin a) e^{-\sqrt{\arcsin a}}, \end{aligned}$$

wobei wir zweimal partiell integriert haben.

3. a) Wir versuchen die Partialbruchzerlegung

$$\frac{5n+4}{n^3+3n^2+2n} = \frac{5n+4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

Multiplikation mit n gibt für $n = 0$, $a = \frac{4}{1 \cdot 2} = 2$. Multiplikation mit $n+1$ gibt für $n = -1$, $b = \frac{-1}{(-1) \cdot 1} = 1$. Multiplikation mit $n+2$ gibt für $n = -2$, $c = \frac{-6}{(-2) \cdot (-1)} = -3$. Also haben wir

$$\frac{5n+4}{n^3+3n^2+2n} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+2}.$$

Für die Partialsummen ergibt sich

$$\sum_{n=1}^N \frac{5n+4}{n^3+3n^2+2n} = \sum_{n=1}^N \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+2} = 2 + \frac{3}{2} - \frac{2}{N+1} - \frac{3}{N+2}.$$

Somit finden wir den Grenzwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+4}{n^3+3n^2+2n} = \sum_{n=1}^N \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+2} = 2 + \frac{3}{2} = 3.5.$$

b) Wir geben zwei Lösungswege. Wir können die Summe schreiben als

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+2)!} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+2)!} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \frac{(e^x - 1)x - e^x + 1 + x}{x^2} = \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2}.\end{aligned}$$

Die Formel gilt für $x \neq 0$. Für $x = 0$ erhalten wir wegen der Stetigkeit den Grenzwert gegen 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + (x-1))e^x}{2x} = \frac{1}{2},$$

wobei wir die Regel von Hôpital verwendet haben.

Für zweite Lösungsmöglichkeit schreiben wir

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)n!} &= \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)n!} = \frac{1}{x^2} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n!} dy = \frac{1}{x^2} \int_0^x y e^y dy \\ &= \frac{x e^x - \int_0^x e^y dy}{x^2} = \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2}.\end{aligned}$$

Den Wert in 0 haben wir oben ausgerechnet.

c) Da der Nenner nie 0 wird, ist nach dem Integralkriterium ist die Reihe genau dann konvergent, falls

$$\int_3^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \ln \ln x}}{x(\ln x)(\ln \ln x)^{3/2}} dx < \infty.$$

Wir brauchen hier eine Grenze, die die Singularität $\ln \ln x = 0$, also $x = e$ umgeht. Setzen wir $y = \ln \ln x$, so ist $dy = dx/(x \ln x)$, also

$$\int_3^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \ln \ln x}}{x(\ln x)(\ln \ln x)^{3/2}} dx = \int_{\ln \ln 3}^{\infty} \frac{\sqrt{1+y}}{y^{3/2}} dy \geq \int_{\ln \ln 3}^{\infty} \frac{1}{y} dy = \infty.$$

Somit ist die Reihe divergent.

4. a) Sei

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_1 + 2\lambda_4 \\ \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Somit ist $\lambda_1 = -2\lambda_4$, $\lambda_2 = \lambda_4$ und $\lambda_3 = \lambda_4$. Die letzte Gleichung ist auch erfüllt. Wir haben damit einen Parameter, den wir frei wählen können. Somit ist der Kern der Abbildung $\mathbb{R}^4 \rightarrow V$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^\top \mapsto \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 + \lambda_4 \mathbf{v}_4$ eindimensional, und damit der Bildraum V dreidimensional.

- b) Aus a) folgt, dass $\mathbf{v}_4 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$. Also ist $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ eine Basis. Aus $\|\mathbf{v}_1\|^2 = 3$ schliessen wir, dass $\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_1/\sqrt{3}$ normiert ist. Weiter ist $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{b}_1 \rangle = 1/\sqrt{3}$. Dann ist $\tilde{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{b}_1/\sqrt{3} = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ orthogonal zu $\mathbf{b}_1$. Weiter ist $\|\tilde{\mathbf{b}}_2\|^2 = 5/3$. Der normierte Vektor ist $\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(2, -1, -1, 3)^\top$. Wir erhalten $\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{b}_1 \rangle = 1/\sqrt{3}$ und $\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{b}_2 \rangle = 2/\sqrt{15}$. Damit ist $\tilde{\mathbf{b}}_3 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{b}_1/\sqrt{3} - 2\mathbf{b}_2/\sqrt{15} = \frac{1}{5}(-3, 4, -1, 3)^\top$ orthogonal zu $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. Der normierte Vektor ist $\mathbf{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{35}}(-3, 4, -1, 3)^\top$. Somit ist

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

eine Orthonormalbasis von V .

- c) Das Bild von $\mathbf{v}_1$ ist $f(\mathbf{v}_1) = g(\mathbf{v}_1) = (2, -1, -1, 0)^\top$ und das Bild von $\mathbf{v}_2$ ist $f(\mathbf{v}_2) = g(\mathbf{v}_2) = (2, 0, 0, 0)^\top$. Da wir in $\mathbb{R}^4$ die kanonische Basis betrachten, sind die Bilder schon in der richtigen Basis gegeben. Somit ist die Matrix der Abbildung

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Da λ ein Eigenwert ist, gibt es einen Eigenvektor $\mathbf{v}$ zum Eigenwert λ . Da $\mathbf{A}$ nicht diagonalisierbar ist, kann es nur einen Eigenvektor geben. Wir können somit die Basis ändern, so dass $\mathbf{v}$ in der Basis ist. Also ist $\mathbf{A}$ ähnlich zu einer Matrix, bei der $\mathbf{e}_1$ ein Eigenwert zu λ ist, das heisst, $\mathbf{A}$ ist ähnlich zu

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Da ähnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polynom haben, und jede Matrix mit zwei verschiedenen Eigenwerten diagonalisierbar ist, muss $b = \lambda$ gelten. Der Wert a kann nicht 0 sein, da sonst $\mathbf{A}$ diagonalisierbar wäre. Es gilt $\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{e}_2 = a\mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{e}_2$, also $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{e}_2/a) = \mathbf{e}_1 + \lambda(\mathbf{e}_2/a)$. Wenn wir also die Basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2/a)$ wählen, hat nach dem Basiswechsel $\mathbf{A}$ die gewünschte Form.

6. a) Wir setzen $v = xy$. Dann ist $y = v/x$ und $y' = (v'x - v)/x^2$. Die Gleichung wird

$$\frac{v'x - v}{x^2} = \frac{\sin(x) \cos^2(v) - v/x}{x},$$

oder $v' = \sin(x) \cos^2(v)$. Mit Trennung der Variablen erhalten wir

$$\frac{dv}{\cos^2 v} = \sin(x) dx.$$

Integrieren wir, erhalten wir $\tan v = -\cos x + C$. Somit ergibt sich

$$v(x) = \arctan(C - \cos x), \quad y(x) = \frac{\arctan(C - \cos x)}{x}.$$

Mit der Anfangsbedingung (x_0, y_0) erhalten wir

$$y_0 = \frac{\arctan(C - \cos x_0)}{x_0}.$$

Lösen wir nach C auf, ergibt sich $C = \tan(x_0 y_0) + \cos(x_0)$, also die allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{\arctan(\tan(x_0 y_0) + \cos(x_0) - \cos x)}{x}.$$

b) In Matrixform ist das System

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind die Lösung von

$$\left(\frac{5}{4} - \lambda\right)\left(\frac{7}{4} - \lambda\right) - \frac{3}{16} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Somit ist $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$. Der Eigenvektor zum Wert 2 ist die Lösung von

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Also ist der erste Eigenvektor $(1, \sqrt{3})^\top$. Der Eigenvektor zum Wert 1 ist die Lösung von

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Also ist der zweite Eigenvektor $(\sqrt{3}, -1)^\top$. Wir brauchen noch die inverse Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix},$$

wobei wir hier die allgemeine Formel aus der Vorlesung verwendet haben. Also erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir $z_1 = y_1 + \sqrt{3}y_2$, $z_2 = \sqrt{3}y_1 - y_2$, so haben wir das System

$$z_1' = 2z_1, \quad z_2' = z_2.$$

Somit ist $z_1 = Ce^{2x}$ und $z_2 = De^x$. Also erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ce^{2x} \\ De^x \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} Ce^{2x} + \sqrt{3}De^x \\ \sqrt{3}Ce^{2x} - De^x \end{pmatrix} .$$

Alternativ folgt aus den Eigenwerten 2 und 1 folgern, dass $y_1 = Ae^{2x} + Be^x$ und $y_2 = Ce^{2x} + De^x$. Einsetzen in die Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} 2Ae^{2x} + Be^x &= \left(\frac{5}{4}A + \frac{\sqrt{3}}{4}C\right)e^{2x} + \left(\frac{5}{4}B + \frac{\sqrt{3}}{4}D\right)e^x , \\ 2Ce^{2x} + De^x &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4}A + \frac{7}{4}C\right)e^{2x} + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}B + \frac{7}{4}D\right)e^x . \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die beiden Gleichungen $-\frac{3}{4}A + \frac{\sqrt{3}}{4}C = 0$ und $\frac{1}{4}B + \frac{\sqrt{3}}{4}D = 0$. Also ist $C = \sqrt{3}A$ und $B = -\sqrt{3}D$.