0. Einführende Beispiele

0.1. Beispiel 1

Sei $\{N_t\}$ ein Poisson Prozess mit Rate 1, das heisst, $\{N_t\}$ hat unabhängige Zuwächse, $N_0 = 0$ und

$$\mathbb{P}[N_{t+h} - N_t = n] = \frac{h^n}{n!}\mathrm{e}^{-h}\,.$$

Betrachten wir den Prozess $\{X_t = x + N_t - ct\}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Mit $\{\mathcal{F}_t\}$ bezeichnen wir die natürliche Filtration bis zur Zeit t. Sei f eine reelle differenzierbare Funktion, so dass $\mathbb{E}[|f(X_t)| + |f'(X_t)| \mid X_0 = x] < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[f(X_{t+h}) \mid X_t = x] = \sum_{n=0}^{\infty} f(x + n - ch)\frac{h^n}{n!}\mathrm{e}^{-h}\,.$$

Die Funktion ist differenzierbar bezüglich h in $h = 0$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[f(X_{t+h}) \mid X_t = x] - f(x)}{h} \\
&\quad = \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(x - ch) - f(x)}{h} + f(x - ch)\frac{\mathrm{e}^{-h} - 1}{h} + \sum_{n=1}^{\infty} f(x + n - ch)\frac{h^{n-1}}{n!}\mathrm{e}^{-h} \\
&\quad = -cf'(x) - f(x) + f(x + 1)\,.
\end{aligned}$$

Das kann als

$$\mathbb{E}[f(X_{t+h}) \mid X_t] = f(X_t) + (-cf'(X_t) + f(X_t + 1) - f(X_t))h + o(h)$$

geschrieben werden. Der Prozess hat also die infinitesimale Drift $(-cf'(X_t) + f(X_t + 1) - f(X_t))\,\mathrm{d}t$. Subtrahieren wir die Drift vom Prozess, dann sollten wir ein Martingale erhalten:

$$M_t = f(X_t) - \int_0^t (-cf'(X_u) + f(X_u + 1) - f(X_u))\,\mathrm{d}u\,.$$

Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[M_{t+h} - M_t \mid \mathcal{F}_t] \\
&\quad = \mathbb{E}\Big[f(X_{t+h}) - f(X_t) - \int_0^h (-cf'(X_{t+s}) + f(X_{t+s}+1) - f(X_{t+s}))\,\mathrm{d}s \;\Big|\; \mathcal{F}_t\Big] \\
&\quad = -f(X_t) + \sum_{n=0}^\infty \Big[f(X_t + n - ch)\frac{h^n}{n!}\mathrm{e}^{-h} \\
&\qquad\qquad + \int_0^h (cf'(X_t+n-cs)s^n + f(X_t+n-cs)(s^n - ns^{n-1}))\frac{\mathrm{e}^{-s}}{n!}\,\mathrm{d}s\Big] \\
&\quad = -f(X_t) + \sum_{n=0}^\infty \Big[f(X_t+n-ch)\frac{h^n}{n!}\mathrm{e}^{-h} - \int_0^h \Big[f(X_t+n-cs)\frac{s^n}{n!}\mathrm{e}^{-s}\Big]'\,\mathrm{d}s\Big] \\
&\quad = -f(X_t) + \sum_{n=0}^\infty f(X_t+n)\frac{0^n}{n!} = 0\,.
\end{aligned}$$

Somit haben wir eine einfache Methode gefunden, um Martingale zu konstruieren.

Von besonderem Interesse sind Martingale, bei denen der Kompensator verschwindet, das heisst,

$$-cf'(x) + f(x+1) - f(x) = 0\,.$$

Versuchen wir es mit einer Funktion der Form $f(x) = \mathrm{e}^{rx}$. Dann ist r die Lösung der Gleichung

$$\mathrm{e}^r - 1 - rc = 0\,.$$

Die Gleichung hat immer die Lösung $r = 0$. Ist $c > 0$ und $c \neq 1$, dann gibt es eine zweite Lösung $r \neq 0$. Sei im weiteren r diese zweite Lösung. Dann ist $\{\mathrm{e}^{rX_t}\}$ ein Martingal. Dieses Beispiel ist allgemeiner, als die Funktionen, die wir in dieser Vorlesung betrachten werden. Wir werden uns hier mit beschränkten Funktionen beschäftigen.

Nehmen wir nun an, wir wollen die Grösse

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T g(X_s, s)\mathrm{e}^{-\alpha s}\,\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-\alpha T}G(X_T) \;\Big|\; X_0 = x\Big]$$

berechnen, wobei $T > 0$ ein (endlicher) Horizont ist, $g : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Kostenfunktion, $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Schlusskostenfunktion und $\alpha \geq 0$ ein Diskontierungsfaktor. Um diese Grösse zu berechnen, betrachten wir für $t \leq T$ die Funktion

$$f(x,t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\mathbb{E}\Big[\int_t^T g(X_s, s)\mathrm{e}^{-\alpha s}\,\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-\alpha T}G(X_T) \;\Big|\; X_t = x\Big]\,.$$

Wir nehmen an, dass diese Funktion stetig differenzierbar ist. Das wird bedeuten, dass wir Bedingungen an g stellen werden müssen. Es ist klar, dass $f(x,T) = G(x)$ gelten muss. Mit der Methode, die wir zur Martingalkonstruktion verwendet haben, erhalten wir, dass

$$f(X_t,t)\mathrm{e}^{-\alpha t} - \int_0^t [f_t(X_s,s) - cf_x(X_s,s) + f(X_s+1,s) - f(X_s,s) - \alpha f(X_s,s)]\mathrm{e}^{-\alpha s}\,\mathrm{d}s$$

ein Martingal ist, wobei f_t und f_x die partiellen Ableitungen bezeichnen. Die Martingaleigenschaft ergibt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\int_t^T g(X_s,s)\mathrm{e}^{-\alpha s}\,\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-\alpha T}G(X_T) \Bigm| X_t\Big] &= f(X_t,t)\mathrm{e}^{-\alpha t} \\
= \mathbb{E}\Big[f(X_T,T)\mathrm{e}^{-\alpha T} - \int_t^T &[f_t(X_s,s) - cf_x(X_s,s) \\
&+ f(X_s+1,s) - f(X_s,s) - \alpha f(X_s,s)]\mathrm{e}^{-\alpha s}\,\mathrm{d}s \Bigm| X_t\Big] \\
= \mathbb{E}\Big[G(X_T)\mathrm{e}^{-\alpha T} - \int_t^T &[f_t(X_s,s) - cf_x(X_s,s) \\
&+ f(X_s+1,s) - f(X_s,s) - \alpha f(X_s,s)]\mathrm{e}^{-\alpha s}\,\mathrm{d}s \Bigm| X_t\Big]\,.
\end{aligned}$$

Daher haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\int_t^T [f_t(X_s,s) - cf_x(X_s,s) + f(X_s+1,s) - f(X_s,s) \\
- \alpha f(X_s,s) + g(X_s,s)]\mathrm{e}^{-\alpha s}\,\mathrm{d}s \Bigm| X_t = x\Big] = 0\,.
\end{aligned}$$

Dies ergibt

$$f_t(x,s) - cf_x(x,s) + f(x+1,s) - f(x,s) - \alpha f(x,s) + g(x,s) = 0\,.$$

Die obige Gleichung heisst **Feynman–Kac Formel**.

Der Prozess $\{X_t\}$ hat noch eine weiter Eigenschaft. Sei $T(t)$ der Operator

$$(T(t)f)(x) = \mathbb{E}[f(X_t) \mid X_0 = x]\,.$$

Da $\mathbb{E}[f(X_{t+s}) \mid X_0 = x] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_{t+s}) \mid X_t] \mid X_0 = x]$ gilt, erhalten wir die Eigenschaft $T(t+s) = T(s)T(t)$. Eine Familie von Operatoren mit dieser Eigenschaft heisst **Halbgruppe**. Wir werden Halbgruppen betrachten, und die Resultate auf Markov Prozesse übertragen.

0.2. Beispiel 2

Sei C eine offene, beschränkte und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ mit einem glatten Rand. Sei $f_b(x) : \partial C \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem Rand. Wir möchten nun eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : C \to \mathbb{R}$ finden, deren zweite Ableitung beschränkt ist, und die die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x_1, x_2) = 0$$

erfüllt, so dass für alle $x_0 \in \partial C$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f_b(x_0)$$

gilt. Wir diskutieren zuerst das Problem der Eindeutigkeit der Lösung.

Nehmen wir also nun an, dass f eine Lösung des Problems ist. Sei $\{\boldsymbol{X}_t\}$ eine zweidimensionale Brownsche Bewegung, das heisst, $\{\boldsymbol{X}_t\}$ hat unabhängige Zuwächse, stetige Pfade, so dass $\boldsymbol{X}_t$ normalverteilt ist mit Mittelwert $(0, 0)^\top$ und Varianzmatrix $t\boldsymbol{I}$, wobei $\boldsymbol{I}$ die Identitätsmatrix bezweichnet. Sei τ der erste Zeitpunkt, wo $\{\boldsymbol{X}_t\}$ die Menge C verlässt. Man kann zeigen, dass $t^{-1}\mathbb{P}[\tau \le t] \to 0$ für $t \to 0$. Daher können wir die Stoppzeit τ in der folgenden Rechnung vernachlässigen. Da die Ableitung beschränkt sein muss, erhalten wir mit Hilfe der Taylorformel

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E}[f(\boldsymbol{X}_t) - f(x) \mid X_0 = x] \\
&\quad = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x_1 + \sqrt{t} y_1, x_2 + \sqrt{t} y_2) - f(x_1, x_2)}{t} \mathrm{e}^{-(y_1^2 + y_2^2)/2} \, \mathrm{d}y_2 \, \mathrm{d}y_1 \\
&\quad = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x_1 + t y_1, x_2 + t y_2) - f(x_1, x_2)}{t^2} \mathrm{e}^{-(y_1^2 + y_2^2)/2} \, \mathrm{d}y_2 \, \mathrm{d}y_1 \\
&\quad = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2)}{t} \\
&\qquad + \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2) + y_1 y_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2} f(x_1, x_2) + \frac{y_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x_1, x_2) \Big) \\
&\qquad \times \mathrm{e}^{-(y_1^2 + y_2^2)/2} \, \mathrm{d}y_2 \, \mathrm{d}y_1 + o(1) \\
&\quad = \tfrac{1}{2} \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x_1, x_2) \Big) = 0 \, .
\end{aligned}$$

Wir werden später sehen, dass dies bedeutet, dass $\{f(\boldsymbol{X}_t)\}$ ein Martingal ist. Der Stoppsatz ergibt nun

$$f(x) = \mathbb{E}[f_b(\boldsymbol{X}_\tau) \mid X_0 = x] \, .$$

Daher ist die Lösung eindeutig. Weiter lässt sich zeigen, dass die Funktion $f(x) = \mathbb{E}[f_b(\boldsymbol{X}_\tau) \mid X_0 = x]$ eine Lösung des obigen Problems ist, sofern sie zweimal differenzierbar ist. Damit haben wir auch die Existenz einer Lösung gezeigt.

Das Martingalproblem, das wir später betrachten werden ist ähnlich. Für unser Beispiel sei

$$\mathfrak{A} = \left\{ \left(f, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f \right) : f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2) \right\} .$$

Wir suchen dann einen Prozess $\{f(\boldsymbol{X}_t)\}$, so dass der Prozess

$$\left\{ f(\boldsymbol{X}_t) - \int_0^t g(\boldsymbol{X}_s) \, \mathrm{d}s \right\}$$

für jedes $(f, g) \in \mathfrak{A}$ ein Martingal ist.