1. Halbgruppentheorie

Zuerst betrachten wir Halbgruppen, die nichts mit Stochastik zu tun haben. Es wird sich zeigen, dass die Theorie uns erlauben wird, auf einfache Weise Martingale zu konstruieren.

In diesem Kapitel arbeiten wir mit einem reellen Banachraum L mit der Norm $\|\cdot\|$. Mit I bezeichnen wir die Identitätsabbildung $I : L \to L, f \mapsto f$.

1.1. Grundlegende Eigenschaften

Definition 1.1. *Eine Familie $\{T(t) : t \geq 0\}$ von beschränkten linearen Operatoren auf L heisst* **Halbgruppe**, *falls $T(0) = I$ und $T(s+t) = T(s)T(t)$ für alle $s, t \geq 0$. Eine Halbgruppe heisst* **stark stetig**, *falls $\lim_{t\to 0} T(t)f = f$ für jedes $f \in L$. Die Halbgruppe heisst* **Kontraktionshalbgruppe**, *falls $\|T(t)\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$.*

Definition 1.2. *Für einen beschränkten linearen Operator B definieren wir die* **Exponentialfunktion**

$$e^{tB} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k B^k$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$, wobei $B^0 = I$.

Es gilt die folgende Eigenschaft

$$\begin{aligned} e^{tB} e^{sB} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n B^n \frac{1}{m!} s^m B^m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!(k-n)!} t^n s^{k-n} B^{n+(k-n)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{k!} \binom{k}{n} t^n s^{k-n} B^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t+s)^k B^k = e^{(t+s)B} . \end{aligned}$$

Man sieht nun leicht, dass $\{T(t) = e^{tB} : t \geq 0\}$ eine stark stetige Halbgruppe ist.

Hilfssatz 1.3. *Sei B eine lineare Kontraktion. Dann ist $e^{t(B-I)}$ für jedes $t \geq 0$ eine Kontraktion.*

Beweis. Es folgt wie im Reellen, dass $e^{t(B-I)} = e^{-t} e^{tB}$. Also gilt

$$\|e^{t(B-I)}\| = e^{-t} \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k \Big\| \leq e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} 1 = 1 .$$

□

Proposition 1.4. *Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf L. Dann gibt es Konstanten $M \ge 1$ und $r \ge 0$, so dass*

$$\|T(t)\| \le M\mathrm{e}^{rt}, \qquad t \ge 0. \tag{1.1}$$

Beweis. Nehmen wir zuerst and, dass für alle $t_0 > 0$

$$\sup_{0 \le s \le t_0} \|T(s)\| = \infty$$

gilt. Dann gibt es eine Folge $\{t_n\}$, die nach 0 konvergiert, so dass $\|T(t_n)\|$ nach Unendlich konvergiert. Nach dem Banach-Steinhaus-Theorem müsste es ein $f \in L$ geben, so dass $\sup_n \|T(t_n)f\| = \infty$. Dann aber wäre $\{T(t)\}$ nicht stark stetig. Somit gibt es ein $t_0 > 0$ und ein $M \ge 1$, so dass $\|T(s)\| \le M$ für $0 \le s \le t_0$. Sei $r = t_0^{-1} \log M$. Sei weiter $k \in \mathbb{N}$ und $0 \le s < t_0$ so gewählt, dass $t = kt_0 + s$. Dann gilt

$$\|T(t)\| = \|T(s)T(t_0)^k\| \le MM^k = M\exp\{t_0^{-1}(kt_0)\log M\} \le M\mathrm{e}^{rt}\,.$$

□

Korollar 1.5. *Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf L. Dann ist für jedes $f \in L$ die Funktion $t \mapsto T(t)f$ stetig.*

Beweis. Wegen Proposition 1.4 gibt es ein $M \ge 1$ und ein $r \ge 0$, so dass (1.1) gilt. Somit haben wir für $t \ge 0$ und $h \ge 0$

$$\|T(t+h)f - T(t)f\| = \|T(t)(T(h)f - f)\| \le M\mathrm{e}^{rt}\|T(h)f - f\|\,,$$

und für $0 \le h \le t$

$$\|T(t-h)f - T(t)f\| = \|T(t-h)(f - T(h)f)\| \le M\mathrm{e}^{rt}\|T(h)f - f\|\,.$$

Lassen wir $h \downarrow 0$ streben, folgt die Behauptung. □

Definition 1.6. *Sei A ein (unbeschränkter) linearer Operator auf einem Unterraum von L. Wir bezeichnen den* **Definitionsbereich** *mit $\mathcal{D}(A)$ und den* **Bildbereich** *mit $\mathcal{R}(A)$. Der* **Graph** *von A ist die Menge*

$$\mathcal{G}(A) = \{(f, Af) : f \in \mathcal{D}(A)\}\,.$$

Der Operator A heisst **abgeschlossen**, *falls $\mathcal{G}(A)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L \times L$ ist.*

Sei Δ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$. Eine Funktion $u : \Delta \to L$ heisst **differenzierbar** oder (Riemann) **integrierbar** analog zu den Definitionen im Falle $L = \mathbb{R}$.

Hilfssatz 1.7. *Sei $u : \Delta \to L$ eine stetige Funktion.*

i) *Sei weiter B ein abgeschlossener linearer Operator auf L. Nehmen wir an, dass $u(t) \in \mathcal{D}(B)$ für alle $t \in \Delta$, dass Bu stetig ist, und dass sowohl u als auch Bu integrierbar über Δ sind. Dann ist $\int_\Delta u(t)\,\mathrm{d}t \in \mathcal{D}(B)$ und*

$$B \int_\Delta u(t)\,\mathrm{d}t = \int_\Delta Bu(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

ii) *Ist $\int_\Delta \|u(t)\|\,\mathrm{d}t < \infty$, dann ist u integrierbar über Δ und*

$$\Big\| \int_\Delta u(t)\,\mathrm{d}t \Big\| \le \int_\Delta \|u(t)\|\,\mathrm{d}t\,.$$

iii) *Ist u stetig differenzierbar und $\Delta = [a, b]$, dann gilt*

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t)\,\mathrm{d}t = u(b) - u(a)\,.$$

Beweis. i) Nehmen wir zuerst $\Delta = [a, b]$ an. Seien $\{t_i : 0 \le i \le n\}$ Zerlegungen des Intervalles, so dass $\sup\{t_i - t_{i-1}\} \to 0$ für $n \to \infty$. Dann konvergieren

$$\sum_{i=1}^n u(t_i)(t_i - t_{i-1}) \to \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t$$

und

$$B\Big(\sum_{i=1}^n u(t_i)(t_i - t_{i-1})\Big) = \sum_{i=1}^n Bu(t_i)(t_i - t_{i-1}) \to \int_a^b Bu(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Da B abgeschlossen ist, folgt die Behauptung. Ist $\Delta = [a, \infty)$, dann haben wir

$$\int_a^{a+n} u(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^\infty u(t)\,\mathrm{d}t$$

und

$$B \int_a^{a+n} u(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+n} Bu(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^\infty Bu(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Da B abgeschlossen ist, folgt auch in diesem Falle die Behauptung. Analog folgen die Aussagen für $\Delta = (-\infty, b]$ und $\Delta = \mathbb{R}$.

ii) und iii) Die Behauptungen folgen wie im Fall $L = \mathbb{R}$. $\square$

Definition 1.8. *Der* **infinitesimale Generator** *ist der lineare Operator*

$$\mathfrak{A}f = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(T(t)f - f) ,$$

wobei $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ der Unterraum aller $f \in L$ ist, für die der Grenzwert existiert.

Proposition 1.9. *Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf L mit infinitesimalem Generator $\mathfrak{A}$.*

i) *Ist $f \in L$ und $t \geq 0$, dann ist $\int_0^t T(s)f \,\mathrm{d}s \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ und*

$$T(t)f - f = \mathfrak{A} \int_0^t T(s)f \,\mathrm{d}s \,.$$

ii) *Ist $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ und $t \geq 0$, dann ist $T(t)f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ und*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(t)f = \mathfrak{A}T(t)f = T(t)\mathfrak{A}f \,.$$

iii) *Ist $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ und $t \geq 0$, dann ist*

$$T(t)f - f = \int_0^t \mathfrak{A}T(s)f \,\mathrm{d}s = \int_0^t T(s)\mathfrak{A}f \,\mathrm{d}s \,.$$

Beweis. i) Wir haben $\mathcal{D}(T(h)) = L$. Wegen Proposition 1.4 ist der Operator $T(h)$ abgeschlossen. Aus Hilfssatz 1.7 folgt mit Hilfe von Korollar 1.5, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(T(h) - I) \int_0^t T(s)f \,\mathrm{d}s &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(s+h)f - T(s)f) \,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f \,\mathrm{d}s - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)f \,\mathrm{d}s \,. \end{aligned}$$

Aus Korollar 1.5 folgt, dass die rechte Seite nach $T(t)f - f$ konvergiert.

ii) Es gilt

$$\frac{1}{h}(T(h)T(t)f - T(t)f) = T(t)\frac{1}{h}(T(h)f - f) \,.$$

Daher haben wir wegen der Abgeschlossenheit von $T(t)$, dass $\mathfrak{A}T(t)f = T(t)\mathfrak{A}f$ und

$$\frac{1}{h}(T(h+t)f - T(t)f) = T(t)\frac{1}{h}(T(h)f - f) = \frac{1}{h}(T(h) - I)T(t)f \,.$$

Dies zeigt die Ableitung von rechts. Für $0 < h \leq t$ haben wir

$$\frac{1}{-h}(T(t-h)f - T(t)f) = T(t-h)\Big(\frac{1}{h}(T(h)f - f) - \mathfrak{A}f\Big) + T(t-h)\mathfrak{A}f \,.$$

Die Norm des ersten Terms konvergiert nach 0. Dies gibt mit Hilfe von Korollar 1.5 die Ableitung von links.

iii) Die letzte Behauptung folgt aus Hilfssatz 1.7 und ii). $\square$

Korollar 1.10. *Sei $\mathfrak{A}$ der infinitesimale Generator einer stark stetigen Halbgruppe $\{T(t)\}$ auf L. Dann ist $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ dicht in L und der Operator $\mathfrak{A}$ ist abgeschlossen.*

Beweis. Wir haben in Proposition 1.9 bewiesen, dass $\int_0^t T(s)f \, \mathrm{d}s \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$. Da $t^{-1}\int_0^t T(s)f \, \mathrm{d}s \to f$ für $t \downarrow 0$, folgt dass $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ dicht in L ist. Sei $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(\mathfrak{A})$, so dass $f_n \to f$ und $\mathfrak{A}f_n \to g$. Wir bemerken zuerst, dass wegen Proposition 1.4 $T(t)f_n = T(t)(f_n - f) + T(t)f \to T(t)f$. Aus Proposition 1.9 folgt, dass $T(t)f_n - f_n = \int_0^t T(s)\mathfrak{A}f_n \, \mathrm{d}s$. Daher gilt im Grenzwert $T(t)f - f = \int_0^t T(s)g \, \mathrm{d}s$. Teilen wir den Ausdruck durch t und lassen $t \downarrow 0$, erhalten wir das Resultat. □

1.2. Der Satz von Hille–Yosida

Definition 1.11. *Sei A ein linearer abgeschlossener Operator auf L. Hat für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ die Gleichung $(\lambda - A)f = 0$ nur die Lösung $f = 0$, gilt $\mathcal{R}(\lambda - A) = L$ und ist $(\lambda - A)^{-1}$ ein beschränkter linearer Operator, dann sagen wir λ gehört zur* **Resolventenmenge** *$\rho(A)$ von A. Der Operator $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$ heisst* **Resolvente** *(in λ) von A.*

Proposition 1.12. *Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf L mit Generator $\mathfrak{A}$. Dann ist $(0, \infty) \subset \rho(\mathfrak{A})$ und*

$$(\lambda - \mathfrak{A})^{-1} g = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t) g \, \mathrm{d}t$$

für alle $g \in L$ und alle $\lambda > 0$. Weiter gilt $\|(\lambda - \mathfrak{A})f\| \ge \lambda \|f\|$ für alle $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$.

Beweis. Sei $\lambda > 0$. Wir definieren $U_\lambda g = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t) g \, \mathrm{d}t$. Dann ist U_λ ein linearer Operator. Aus Hilfssatz 1.7 folgt, dass

$$\|U_\lambda g\| \le \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \|T(t)g\| \, \mathrm{d}t \le \lambda^{-1} \|g\| \,. \tag{1.2}$$

Daher ist U_λ wohldefiniert und beschränkt.

Sei $g \in L$ und $h > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}(T(h) - I)U_\lambda g &= \frac{1}{h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}(T(t+h)g - T(t)g) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\Big(\mathrm{e}^{\lambda h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda(t+h)} T(t+h) g \, \mathrm{d}t - \int_0^\infty \mathrm{e}^{\lambda t} T(t) g \, \mathrm{d}t\Big) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t) g \, \mathrm{d}t - \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{h}\int_0^h \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t) g \, \mathrm{d}t \,.
\end{aligned}$$

Lassen wir $h \downarrow 0$, zeigt sich, dass $U_\lambda g \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{A}U_\lambda g = \lambda U_\lambda g - g$, oder äquivalent dazu,

$$(\lambda - \mathfrak{A})U_\lambda g = g\,. \tag{1.3}$$

Nehmen wir nun an, dass $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$. Aus Proposition 1.9, Korollar 1.5 und Hilfssatz 1.7 folgt, dass

$$U_\lambda \mathfrak{A} g = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)\mathfrak{A} g \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathfrak{A}\mathrm{e}^{-\lambda t} T(t) g \,\mathrm{d}t = \mathfrak{A}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t) g \,\mathrm{d}t = \mathfrak{A}U_\lambda g\,.$$

Daher gilt für $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$, dass

$$U_\lambda(\lambda - \mathfrak{A})g = (\lambda - \mathfrak{A})U_\lambda g = g\,. \tag{1.4}$$

Sei nun $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$, so dass $(\lambda - \mathfrak{A})g = 0$. Aus (1.4) erhalten wir $g = U_\lambda(\lambda - \mathfrak{A})g = U_\lambda 0 = 0$. Wegen (1.3) haben wir, dass $\mathcal{R}(\lambda - \mathfrak{A}) = L$. Aus (1.4) erhalten wir $(\lambda - \mathfrak{A})^{-1} = U_\lambda$.

Sei $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$. Aus (1.2) erhalten wir nun

$$\|f\| = \|U_\lambda(\lambda - \mathfrak{A})f\| \le \lambda^{-1}\|(\lambda - \mathfrak{A})f\|\,.$$

□

Hilfssatz 1.13. *Sei A ein abgeschlossener Operator auf L. Dann ist $\rho(A)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $\lambda \in \rho(A)$. Wählen wir $\mu \in \mathbb{R}$, so dass $|\mu - \lambda| < \|R_\lambda\|^{-1}$. Definieren wir

$$U = \sum_{n=0}^\infty (\lambda - \mu)^n R_\lambda^{n+1}\,. \tag{1.5}$$

Wir haben

$$\|U\| \le \sum_{n=0}^\infty |\lambda - \mu|^n \|R_\lambda\|^{n+1} < \infty\,.$$

Also ist U ein beschränkter linearer Operator auf L. Weiter gilt, dass

$$\begin{aligned} U(\mu - A) &= \sum_{n=0}^\infty (\lambda - \mu)^n R_\lambda^{n+1}(\lambda - A - (\lambda - \mu)) \\ &= \sum_{n=0}^\infty \left[(\lambda - \mu)^n R_\lambda^n - (\lambda - \mu)^{n+1} R_\lambda^{n+1}\right] = I \end{aligned}$$

und analog, dass $(\mu - A)U = I$. Ist $(\mu - A)f = 0$, so ist $f = U(\mu - A)f = 0$ und $\mathcal{R}(\mu - A) = L$. Da $U = (\mu - A)^{-1}$, ist $\mu \in \rho(A)$. □

Definition 1.14. *Ein linearer Operator A auf L heisst* **dissipativ***, falls $\|\lambda f - Af\| \geq \lambda \|f\|$ für jedes $f \in \mathcal{D}(A)$ und jedes $\lambda > 0$.*

Hilfssatz 1.15. *Sei A ein dissipativer linearer Operator auf L und sei $\lambda > 0$. Dann ist A genau dann abgeschlossen, falls die Menge $\mathcal{R}(\lambda - A)$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Nehmen wir zuerst an, dass A abgeschlossen ist. Sei $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ eine Folge, so dass $(\lambda - A)f_n \to h$ für ein $h \in L$. Dann ist $\|f_n - f_m\| \leq \lambda^{-1}\|(\lambda - A)(f_n - f_m)\|$ eine Cauchy-Folge. Daher gibt es ein $f \in L$, so dass $f_n \to f$ und $Af_n \to \lambda f - h$. Da A abgeschlossen ist, haben wir $f \in \mathcal{D}(A)$ und $(\lambda - A)f = h$. Somit ist $\mathcal{R}(\lambda - A)$ abgeschlossen.

Nehmen wir nun an, dass $\mathcal{R}(\lambda - A)$ abgeschlossen ist. Sei $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ eine Folge, so dass $f_n \to f$ und $Af_n \to g$. Dann konvergiert $(\lambda - A)f_n$ nach $\lambda f - g$. Daher gibt es ein $h \in \mathcal{D}(A)$, so dass $\lambda f - g = (\lambda - A)h$. Es gilt, dass $\|f_n - h\| \leq \lambda^{-1}\|(\lambda - A)(f_n - h)\| \to 0$, und somit gilt $h = f$. Damit ist A abgeschlossen. □

Hilfssatz 1.16. *Sei A ein dissipativer, abgeschlossener und linearer Operator auf L. Falls $\rho(A) \cap (0, \infty) \neq \emptyset$, dann ist $(0, \infty) \subset \rho(A)$.*

Beweis. Sei $\{\lambda_n\} \subset \rho(A) \cap (0, \infty)$ eine Folge, so dass $\lambda_n \to \lambda$ für ein $\lambda > 0$. Sei $f \in \mathcal{D}(A)$, so dass $(\lambda - A)f = 0$. Dann gilt

$$\|f\| \leq \lambda^{-1}\|(\lambda - A)f\| = 0\,,$$

und somit ist $f = 0$.

Sei $g \in L$. Wir definieren $g_n = (\lambda - A)(\lambda_n - A)^{-1}g$. Wir bemerken, dass

$$\|(\lambda_n - A)^{-1}g\| \leq \lambda_n^{-1}\|(\lambda_n - A)(\lambda_n - A)^{-1}g\| = \lambda_n^{-1}\|g\|\,. \tag{1.6}$$

Dann gilt

$$\|g_n - g\| = \|((\lambda - A) - (\lambda_n - A))(\lambda_n - A)^{-1}g\| \leq \frac{|\lambda_n - \lambda|}{\lambda_n}\|g\| \to 0\,.$$

Daher ist $\mathcal{R}(\lambda - A)$ dicht in L. Aus Hilfssatz 1.15 folgt, dass $\mathcal{R}(\lambda - A)$ eine abgeschlossene Menge ist. Somit ist $\mathcal{R}(\lambda - A) = L$.

Aus (1.6) folgt, dass $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}$. Somit haben wir $\lambda \in \rho(A)$, und die Menge $\rho(A) \cap (0, \infty)$ ist abgeschlossen in $(0, \infty)$. Da nach Hilfssatz 1.13 die Menge auch offen in $(0, \infty)$ ist, haben wir, dass $\rho(A) \cap (0, \infty) = (0, \infty)$. □

Hilfssatz 1.17. *Sei A ein dissipativer, abgeschlossener und linearer Operator auf L. Nehmen wir an, dass $\mathcal{D}(A)$ dicht in L ist, und dass $(0,\infty) \subset \rho(A)$. Für jedes $\lambda > 0$ definieren wir $A_\lambda = \lambda A(\lambda - A)^{-1}$. Der Operator A_λ heisst* **Yosida-Approximation** *von A. Dann gilt:*

i) *Für jedes $\lambda > 0$ ist A_λ ein beschränkter linearer Operator auf L, und $\{\mathrm{e}^{tA_\lambda}\}$ ist eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf L mit Generator A_λ.*

ii) *Wir haben $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$ für alle $\lambda, \mu > 0$.*

iii) *Für jedes $f \in \mathcal{D}(A)$ gilt, $\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda f = Af$.*

Beweis. i) Wir bemerken zuerst, dass (siehe (1.6)) $\|R_\lambda\| \le \lambda^{-1}$. Es folgt dann, dass

$$A_\lambda = \lambda(\lambda - (\lambda - A))(\lambda - A)^{-1} = \lambda^2 R_\lambda - \lambda\,. \tag{1.7}$$

Daher ist A_λ beschränkt, und

$$\|\mathrm{e}^{tA_\lambda}\| = \mathrm{e}^{-\lambda t}\|\mathrm{e}^{t\lambda^2 R_\lambda}\| \le \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{t\lambda^2\|R_\lambda\|} \le 1$$

gilt für alle $t \ge 0$. Dass $\{\mathrm{e}^{tA_\lambda}\}$ eine stark stetige Halbgruppe ist, haben wir schon gezeigt. Also ist $\{\mathrm{e}^{tA_\lambda}\}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe.

Bemerken wir, dass

$$t^{-1}(\mathrm{e}^{tA_\lambda} - I) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} A_\lambda^n$$

für $t \downarrow 0$ nach A_λ konvergiert. Daher ist A_λ der Generator der Halbgruppe $\{\mathrm{e}^{tA_\lambda}\}$.

ii) Wir zeigen zuerst $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$. Sei $\lambda > 0$ fest, und definieren wir die Menge $H = \{\mu > 0 : R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda\}$. Trivialerweise ist $\lambda \in H$, und somit $H \ne \emptyset$. Wir zeigen zuerst, dass H offen in $(0,\infty)$ ist. Sei $\mu \in H$ und $\eta > 0$, so dass $|\eta - \mu| < \|R_\mu\|^{-1}$. Dann folgt aus (1.5)

$$R_\lambda R_\eta = R_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \eta)^n R_\mu^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \eta)^n R_\mu^{n+1} R_\lambda = R_\eta R_\mu\,. \tag{1.8}$$

Dies zeigt, dass $\eta \in H$. Wir zeigen nun, dass H abgeschlossen in $(0,\infty)$ ist. Sei $\{\mu_n\} \subset H$ eine konvergente Folge, die nach $\mu > 0$ konvergiert. Wählen wir ein n, so dass $|\mu_n - \mu| < \mu/2$. Dann ist $\mu_n > \mu/2$. Da $\|R_{\mu_n}\| \le \mu_n^{-1}$, haben wir $|\mu_n - \mu| < \mu/2 < \mu_n \le \|R_{\mu_n}\|^{-1}$. Ersetzen wir in (1.8) die Variablen μ und η durch μ_n und μ respektive, dann erhalten wir $\mu \in H$. Somit gilt $H = (0,\infty)$. Aus (1.7) folgt nun $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$.

iii) Sei $g \in \mathcal{D}(A)$. Dann gilt

$$\|(\lambda R_\lambda - I)g\| = \|R_\lambda(\lambda - (\lambda - A))g\| \le \lambda^{-1}\|Ag\| \to 0$$

für $\lambda \to \infty$. Sei nun $g \in L$. Da $\mathcal{D}(A)$ dicht in L ist, gibt es eine Folge $\{g_n\} \subset \mathcal{D}(A)$, die nach g konvergiert. Da $\|\lambda R_\lambda - I\| \le \lambda\|R_\lambda\| + 1 \le 2$, erhalten wir, dass $\|(\lambda R_\lambda - I)(g - g_n)\|$ für $n \to \infty$ nach 0 konvergiert. Dies impliziert, dass $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda g = g$. Sei nun $f \in \mathcal{D}(A)$. Dann gilt

$$A_\lambda f = \lambda A R_\lambda f = \lambda^2 R_\lambda f - \lambda(\lambda - A)R_\lambda f = \lambda^2 R_\lambda f - \lambda R_\lambda(\lambda - A)f = \lambda R_\lambda A f \to Af$$

für $\lambda \to \infty$. □

Hilfssatz 1.18. *Seien B und C beschränkte lineare Operatoren auf L, so dass $BC = CB$, $\|\mathrm{e}^{tB}\| \le 1$ und $\|\mathrm{e}^{tC}\| \le 1$ für alle $t \ge 0$. Dann gilt*

$$\|(\mathrm{e}^{tB} - \mathrm{e}^{tC})f\| \le t\|(B - C)f\|$$

für jedes $f \in L$ und $t \ge 0$.

Beweis. Aus Hilfssatz 1.7 und der Kommutivität von B and C folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tB}f - \mathrm{e}^{tC}f &= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathrm{e}^{sB}\mathrm{e}^{(t-s)C}f)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \mathrm{e}^{sB}(B - C)\mathrm{e}^{(t-s)C}f\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \mathrm{e}^{sB}\mathrm{e}^{(t-s)C}(B - C)f\,\mathrm{d}s\,. \end{aligned}$$

Ziehen wir die Norm ins Integral, folgt die Behauptung. □

Satz 1.19. (Satz von Hille–Yosida) *Ein linearer Operator A auf L ist genau dann der Generator einer stark stetigen Kontraktionshalbgruppe auf L, falls*

i) *$\mathcal{D}(A)$ ist dicht in L,*

ii) *A ist dissipativ und*

iii) *$\mathcal{R}(\lambda - A) = L$ für ein $\lambda > 0$.*

Beweis. Ist A der Generator einer stark stetigen Kontraktionshalbgruppe $\{T(t)\}$, so sind die Bedingungen i)–iii) erfüllt, wegen Korollar 1.10 und Proposition 1.12.

Seien nun die Bedingungen i)–iii) erfüllt. Aus Hilfsatz 1.15 folgt, dass A abgeschlossen ist. Hilfssatz 1.16 und dessen Beweis zeigen, dass $(0, \infty) \subset \rho(A)$. Definieren wir die Yosida-Approximation A_λ wie in Hilfssatz 1.17. Aus Hilfssatz 1.17 wissen wir, dass $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$. Setzen wir $T_\lambda(t) = \mathrm{e}^{tA_\lambda}$. Dann ist $\{T_\lambda(t)\}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf L (Hilfssatz 1.17). Sei $f \in \mathcal{D}(A)$. Wegen Hilfssatz 1.18 haben wir

$$\|(T_\lambda(t) - T_\mu(t))f\| \le t\|(A_\lambda - A_\mu)f\| \; .$$

Da $A_\lambda f$ nach Af konvergiert, existiert $\lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(t)f$ für alle $t \ge 0$. Der Grenzübergang ist gleichmässig auf beschränkten Intervallen. Wir bezeichnen den Grenzwert mit $T(t)f$.

Sei $g \in L$. Dann gibt es eine Folge $\{g_n\} \subset \mathcal{D}(A)$, die nach g konvergiert, da $\mathcal{D}(A)$ dicht in L ist. Wir haben dann

$$(T_\lambda(t) - T_\mu(t))g = T_\lambda(t)(g - g_n) + (T_\lambda(t) - T(t))g_n + (T(t) - T_\mu(t))g_n + T_\mu(t)(g_n - g) \; .$$

Da T_λ und T_μ Kontraktionshalbgruppen sind, können der erste und der letzte Term auf der rechten Seite beliebig klein gemacht werden, indem man n gross genug wählt. Der zweite und dritte Term können beliebig klein gemacht werden, indem man λ und μ gross genug wählt. Somit konvergiert auch $\{T_\lambda(t)g\}$, und wegen den obigen Betrachtungen gleichmässig auf beschränkten Intervallen. Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $T(t)g$. Es gilt $T(0)g = g$ und $\|T(t)\| \le 1$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} &T(s+t)g - T(s)T(t)g \\ &\qquad = (T(s+t) - T_\lambda(s+t))g + T_\lambda(s)(T_\lambda(t) - T(t))g + (T_\lambda(s) - T(s))T(t)g \; . \end{aligned}$$

Lassen wir $\lambda \to \infty$ folgt, dass $\{T(t)\}$ eine Kontraktionshalbgruppe ist. Wir bemerken, dass

$$\|T(t)g - g\| \le \|T(t)g - T_\lambda(t)g\| + \|T_\lambda(t)g - g\| \; .$$

Der erste Term kann für $t \in (0, 1)$ gleichmässig klein gemacht werden, indem wir λ gross genug wählen. Der zweite Term kann für t klein genug beliebig klein gemacht werden, da $\{T_\lambda(t)\}$ stark stetig ist. Daher ist auch $\{T(t)\}$ stark stetig.

Sei $\mathfrak{A}$ der Generator von $\{T(t)\}$. Wählen wir $g \in \mathcal{D}(A)$. Wir wissen (Hilfssatz 1.17), dass A_λ der Generator von $\{T_\lambda(t)\}$ ist. Aus Proposition 1.9 folgt, dass

$$T_\lambda(t)g - g = \int_0^t T_\lambda(s)A_\lambda g \,\mathrm{d}s \, .$$

Da

$$T_\lambda(s)A_\lambda g - T(s)Ag = T_\lambda(s)(A_\lambda g - Ag) + (T_\lambda(s) - T(s))Ag\ ,$$

folgt aus Hilfsatz 1.17, dass $T_\lambda(s)A_\lambda g$ gleichmässig in $[0,t]$ nach $T(s)Ag$ konvergiert. Daher haben wir

$$T(t)g - g = \int_0^t T(s)Ag \,\mathrm{d}s\,.$$

Teilen wir durch t und lassen $t \downarrow 0$, erhalten wir $\mathfrak{A}g = Ag$. Daher ist $\mathfrak{A}$ eine Erweiterung von A auf $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$.

Sei nun $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ und wählen wir $\lambda > 0$. Dann gilt $\mathcal{R}(\lambda - A) = L$. Aus Proposition 1.12 wissen wir, dass $\lambda \in \rho(\mathfrak{A})$. Sei $h = (\lambda - A)^{-1}(\lambda - \mathfrak{A})f$. Dann ist $h \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\mathfrak{A})$. Daher gilt

$$(\lambda - \mathfrak{A})h = (\lambda - A)h = (\lambda - \mathfrak{A})f\ ,$$

als $(\lambda - \mathfrak{A})(h - f) = 0$. Daher gilt $h - f = 0$ und damit $f \in \mathcal{D}(A)$. Das bedeutet, dass $\mathcal{D}(\mathfrak{A}) = \mathcal{D}(A)$. Also haben wir gezeigt, dass $\mathfrak{A} = A$. □

Proposition 1.20. *Sei A ein dissipativer linearer Operator auf L. Sei $u : [0,\infty) \to L$ eine stetige Funktion, so dass $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ für alle $t > 0$, $Au : (0,\infty) \to L$ stetig ist und*

$$u(t) = u(\varepsilon) + \int_\varepsilon^t Au(s)\,\mathrm{d}s$$

für alle $0 < \varepsilon < t$. Dann ist $\|u(t)\| \le \|u(0)\|$ für alle $t > 0$.

Beweis. Wählen wir eine Zerlegung $0 < \varepsilon = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$. Dann gilt

$$u(t_i) - u(t_{i-1}) = \Big(u(t) - \int_{t_i}^t Au(s)\,\mathrm{d}s\Big) - \Big(u(t) - \int_{t_{i-1}}^t Au(s)\,\mathrm{d}s\Big) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} Au(s)\,\mathrm{d}s\ .$$

Da der Operator dissipativ ist, haben wir

$$\|u(t_i) - (t_i - t_{i-1})Au(t_i)\| = (t_i - t_{i-1})\,\big\|(t_i - t_{i-1})^{-1}u(t_i) - Au(t_i)\big\| \ge \|u(t_i)\|\,.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &= \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^{n} (\|u(t_i)\| - \|u(t_{i-1})\|) \\
&\le \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^{n} (\|u(t_i) - (t_i - t_{i-1})Au(t_i)\| - \|u(t_i) - (u(t_i) - u(t_{i-1}))\|) \\
&= \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^{n} \Big(\|u(t_i) - (t_i - t_{i-1})Au(t_i)\| - \Big\|u(t_i) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} Au(s)\,\mathrm{d}s\Big\|\Big) \\
&\le \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^{n} \Big\|(t_i - t_{i-1})Au(t_i) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} Au(s)\,\mathrm{d}s\Big\| \\
&= \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^{n} \Big\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (Au(t_i) - Au(s))\,\mathrm{d}s\Big\| \\
&\le \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|Au(t_i) - Au(s)\|\,\mathrm{d}s\,.
\end{aligned}$$

Die Funktion $Au(t)$ ist auf dem Intervall $[\varepsilon, t]$ gleichmässig stetig. Lassen wir also $\max\{t_i - t_{i-1}\}$ gegen Null konvergieren, so folgt, dass $\|u(t)\| \le \|u(\varepsilon)\|$. Lässt man $\varepsilon \downarrow 0$, folgt die Behauptung. □

Proposition 1.21. *Seien $\{T(t)\}$ und $\{S(t)\}$ zwei stark stetige Kontraktionshalbgruppen auf L mit den Generatoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, respektive. Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, dann gilt $T(t) = S(t)$ für alle $t \ge 0$.*

Beweis. Sei $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$. Dann folgt aus Proposition 1.9

$$(T(t) - S(t))f - (T(\varepsilon) - S(\varepsilon))f = \int_{\varepsilon}^{t} \mathfrak{A}(T(s) - S(s))f\,\mathrm{d}s\,.$$

Nach Korollar 1.5 ist $(T(t) - S(t))f$ stetig in t. Aus

$$\mathfrak{A}(T(t) - S(t))f = \lambda(T(t) - S(t))f - (\lambda - \mathfrak{A})(T(t) - S(t))f$$

folgt aus der Dissipativität, dass auch $\mathfrak{A}(T(t) - S(t))f$ stetig in t ist. Also impliziert Proposition 1.20

$$\|(T(t) - S(t))f\| \le \|f - f\| = 0\,.$$

Nach Satz 1.19 is $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ dicht in L. Daher gilt wegen der Stetigkeit $T(t)f = S(t)f$ für alle $f \in L$. □

Proposition 1.22. *Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf L mit Generator $\mathfrak{A}$. Sei A_λ die Yosida-Approximation von $\mathfrak{A}$. Dann gilt*

$$\|e^{tA_\lambda} f - T(t)f\| \le t\|A_\lambda f - \mathfrak{A} f\|$$

für jedes $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$, $t \ge 0$, $\lambda > 0$. Insbesondere gilt für jedes $f \in L$, dass $\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda} f = T(t)f$ gleichmässig auf beschränkten Intervallen.

Beweis. Aus dem Beweis von Satz 1.19 folgt, dass es eine Halbgruppe $\{S(t)\}$ mit Generator $\mathfrak{B}$ gibt, so dass die Aussage für $\{S(t)\}$ gilt. Aber nach Proposition 1.21 gilt $T(t) = S(t)$. □

Korollar 1.23. *Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf L mit Generator $\mathfrak{A}$. Für $M \subset L$ sei*

$$\Lambda_M = \{\lambda > 0 : \lambda(\lambda - \mathfrak{A})^{-1}|_M : M \to M\}\,.$$

Falls M eine abgeschlossene konvexe Untermenge von L und Λ_M unbeschränkt ist, oder falls M ein abgeschlossner Unterraum von L und Λ_M nicht leer ist, dann ist $T(t)|_M : M \to M$ für alle $t \ge 0$.

Beweis. Da $\mathfrak{A}$ dissipativ ist, gilt $\|(\lambda-\mathfrak{A})^{-1} f\| \le \lambda^{-1}\|f\|$. Sei $\lambda, \mu > 0$ und $\mu < 2\lambda$. Aus dem Beweis von Hilfssatz 1.13, folgt dass

$$\mu(\mu - \mathfrak{A})^{-1} = \frac{\mu}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(1 - \frac{\mu}{\lambda}\Bigr)^n \bigl(\lambda(\lambda - \mathfrak{A})^{-1}\bigr)^{n+1}\,.$$

Ist M abgeschlossen und konvex, so folgt aus $\lambda \in \Lambda_M$, dass $(0, \lambda] \subset \Lambda_M$. Ist M ein abgeschlossener Unterraum, dann impliziert $\lambda \in \Lambda_M$, dass $(0, 2\lambda) \subset \Lambda_M$. Dies bedeutet in beiden Fällen, dass $\Lambda_M = (0, \infty)$. Aus (1.7) folgern wir, dass

$$e^{tA_\lambda} = e^{-\lambda t} e^{t\lambda(\lambda(\lambda-\mathfrak{A})^{-1})} = e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\bigl(\lambda(\lambda - \mathfrak{A})^{-1}\bigr)^n$$

für alle $t \ge 0$ und $\lambda > 0$. Da M abgeschlossen ist, folgt die Behauptung aus Proposition 1.22. □

Definition 1.24. *Ein linearer Operator A auf L heisst* **abschliessbar***, falls es eine abgeschlossene Erweiterung von A gibt. Ist A abschliessbar, so bezeichnen wir mit $\bar{A}$ den* **Abschluss** *von A, das heisst, die minimale abgeschlossene Erweiterung von A.*

Es gilt somit $\overline{\mathcal{G}(A)} = \mathcal{G}(\bar{A})$.

Hilfssatz 1.25. *Sei A ein dissipativer linearer Operator auf L, so dass $\mathcal{D}(A)$ dicht in L ist. Dann ist A abschliessbar, $\bar{A}$ ist dissipativ und $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$ für jedes $\lambda > 0$.*

Beweis. Um zu zeigen, dass A abschliessbar ist, genügt es zu zeigen, dass für jedes Paar von Folgen $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ und $\{g_n\} \subset \mathcal{D}(A)$, so dass $\lim f_n = \lim g_n$ und beide Grenzwerte $\lim Af_n$ und $\lim Ag_n$ existieren, gilt, dass $\lim Af_n = \lim Ag_n$. Betrachten wir $\{f_n - g_n\}$, so brauchen wir bloss zu zeigen, dass für eine Folge $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(A)$, so dass $f_n \to 0$ und $\lim Af_n = g$, gelten muss, dass $g = 0$. Da $\mathcal{D}(A)$ dicht ist in L, gibt es eine Folge $\{g_m\} \subset \mathcal{D}(A)$, so dass $g_m \to g$. Sei $\lambda > 0$. Da A dissipativ ist, haben wir

$$\|(1 - \lambda^{-1}A)g_m - g\| = \lambda^{-1} \lim_{n\to\infty} \|(\lambda - A)(g_m + \lambda f_n)\| \geq \lim_{n\to\infty} \|g_m + \lambda f_n\| = \|g_m\| \,.$$

Lassen wir $\lambda \to \infty$, erhalten wir $\|g_m - g\| \geq \|g_m\|$. Das bedeutet, dass $\|g_m\| \to 0$, also $g = 0$.

Sei $f \in \mathcal{D}(\bar{A})$. Sei $\{(f_n, g_n)\} \subset \mathcal{G}(A)$, so dass $(f_n, g_n) \to (f, \bar{A}f)$. Dann gilt $\|\lambda f_n - Af_n\| \geq \lambda\|f_n\|$. Lassen wir $n \to \infty$, erhalten wir $\|\lambda f - \bar{A}f\| \geq \lambda\|f\|$. Somit ist $\bar{A}$ dissipativ.

Es ist klar, dass $\mathcal{R}(\lambda - A) \subset \mathcal{R}(\lambda - \bar{A}) \subset \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}$. Weiter folgt aus Hilfssatz 1.15, dass $\mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$ abgeschlossen ist. Daher ist $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} \subset \mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$. □

Wir können nun eine alternative Form des Satzes von Hille–Yosida beweisen.

Satz 1.26. *Ein linearer Operator A ist abschliessbar und der Abschluss $\bar{A}$ ist der Generator einer stark stetigen Kontraktionshalbgruppe auf L, genau dann, wenn*

i) *$\mathcal{D}(A)$ ist dicht in L,*

ii) *A ist dissipativ und*

iii) *$\mathcal{R}(\lambda - A)$ ist dicht in L für ein $\lambda > 0$.*

Beweis. Sei A abschliessbar und $\bar{A}$ der Generator einer stark stetigen Kontraktionshalbgruppe. Dann muss gelten, dass $\mathcal{D}(A)$ dicht ist in $\mathcal{D}(\bar{A})$. Aus Satz 1.19 wissen wir, dass $\mathcal{D}(\bar{A})$ dicht ist in L. Somit ist auch $\mathcal{D}(A)$ dicht in L. Da nach Satz 1.19 die Erweiterung $\bar{A}$ dissipativ ist, muss auch A dissipativ sein. Wir wissen weiter aus Satz 1.19, dass es ein $\lambda > 0$ gibt, so dass $\mathcal{R}(\lambda - \bar{A}) = L$. Aus Hilfssatz 1.25 erhalten wir $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \mathcal{R}(\lambda - \bar{A}) = L$. Somit ist $\mathcal{R}(\lambda - A)$ dicht in L.

Nehmen wir nun an, dass die Bedingungen erfüllt sind. Nach Hilfssatz 1.25 ist A abschliessbar, $\bar{A}$ ist dissipativ und $\mathcal{R}(\lambda - \bar{A}) = \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = L$ für ein $\lambda > 0$. Dann ist auch $\mathcal{D}(\bar{A})$ dicht in L. Die Aussage folgt nun aus dem Satz von Hille–Yosida. □

1.3. Kerne

Definition 1.27. *Sei A ein abgeschlossener linearer Operator auf L. Ein Unterraume D von $\mathcal{D}(A)$ heisst* **Kern** *für A, falls der Abschluss der Einschränkung von A auf D gleich A ist, d.h. $\overline{A|_D} = A$.*

Proposition 1.28. *Sei $\mathfrak{A}$ der Generator einer stark stetigen Kontraktionshalbgruppe auf L. Ein Unterraum D von $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ ist genau dann ein Kern für $\mathfrak{A}$, falls D dicht in L ist und $\mathcal{R}(\lambda - \mathfrak{A}|_D)$ dicht in L ist für ein $\lambda > 0$.*

Beweis. Da $\mathfrak{A}$ dissipativ ist, ist auch $\mathfrak{A}|_D$ dissipativ. Sei D ein Kern für A. Dann folgen die Bedingungen aus Satz 1.26. Seien die Bedingungen erfüllt. Dann erzeugt $\overline{\mathfrak{A}|_D}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf L (Satz 1.26). Es folgt, dass $\mathfrak{A}$ eine Erweiterung von $\overline{\mathfrak{A}|_D}$ ist. Aus der Konstruktion der Halbgruppe in Satz 1.19 folgt, dass die beiden Halbgruppen identisch sein müssen. Also ist $\overline{\mathfrak{A}|_D} = A$. □

1.4. Mehrwertige Operatoren

Definition 1.29. *Ein* **mehrwertiger Operator** *A auf L ist eine Teilmenge von L^2. Der* **Definitionsbereich** *ist die Menge $\mathcal{D}(A) = \{f : \exists g, (f, g) \in A\}$ und der* **Bildbereich** *ist die Menge $\mathcal{R}(A) = \{g : \exists f, (f, g) \in A\}$. A heisst* **linear**, *falls A ein Unterraum von L^2 ist. Ist A linear, dann heisst der Operator* **einwertig**, *falls $(0, g) \in A$ impliziert, dass $g = 0$. Ist A linear, dann heisst A* **dissipativ**, *falls $\|\lambda f - g\| \geq \lambda \|f\|$ für alle $(f, g) \in A$ und alle $\lambda > 0$. Der* **Abschluss** *$\bar{A}$ von A ist der übliche Abschluss. Weiter definieren wir $\lambda - A = \{(f, \lambda f - g) : (f, g) \in A\}$.*

Hilfssatz 1.30. *Sei $A \subset L^2$ linear und dissipativ. Dann ist*

$$A_0 = \{(f, g) \in \bar{A} : g \in \overline{\mathcal{D}(A)}\}$$

einwertig und $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$ für jedes $\lambda > 0$.

Beweis. Sei $(0, g) \in A_0$. Dann gibt es eine Folge $\{(g_n, h_n)\} \subset A$, so dass $g_n \to g$. Wegen der Linearität gilt, dass $(g_n, h_n + \lambda g) \in \bar{A}$. Da der Operator dissipativ ist, haben wir $\|\lambda g_n - h_n - \lambda g\| \geq \lambda \|g_n\|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Teilen wir durch λ und lassen $\lambda \to \infty$, erhalten wir $\|g_n - g\| \geq \|g_n\|$. Lassen wir $n \to \infty$, erhalten wir $g = 0$.

Sei $\lambda > 0$. Es ist klar, dass $\mathcal{R}(\lambda - A) \subset \mathcal{R}(\lambda - \bar{A}) \subset \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}$. Sei $\{(f_n, g_n)\} \subset \bar{A}$ mit $\lambda f_n - g_n \to h$ für ein $h \in L$. Wir haben $\lambda \|f_n - f_m\| \leq \|(\lambda f_n - g_n) - (\lambda f_m - g_m)\|$. Daher ist $\{f_n\}$ eine Cauchy-Folge, das heisst, $f_n \to f$ für ein $f \in L$. Da $g_n \to \lambda f - h$ und da $\bar{A}$ abgeschlossen ist, folgt, dass $f \in \mathcal{D}(\bar{A})$. Daher gibt es ein $g \in L$, so dass $(f, g) \in \bar{A}$ und $g_n \to g$. Weiter haben wir, dass $h = \lambda f - g \in \mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$, das heisst, $\mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$ ist abgschlossen. Somit gilt $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} \subset \mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$. □

1.5. Halbgruppen auf Funktionenräumen

Sei $(M, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum und Γ ein Klasse von positiven Massen auf M. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}$ den Vektorraum der $\mathcal{M}$-messbaren Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$, so dass

$$\|f\| = \sup_{\mu \in \Gamma} \int |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty \, .$$

$\| \cdot \|$ ist eine Seminorm auf $\mathcal{L}$. In der Tat,

$$\int |f + g| \, \mathrm{d}\mu \leq \int |f| + |g| \, \mathrm{d}\mu \leq \|f\| + \|g\| \, ,$$

und damit $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Dass $\|cf\| = |c| \|f\|$ folgt leicht. Sei $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L} : \|f\| = 0\}$ und L der Quotientenraum $\mathcal{L}/\mathcal{N}$. Dann kann man zeigen, dass L ein Banachraum ist (Übung). Ist zum Beispiel Γ der Raum der Wahrscheinlichkeitsmasse auf $\mathcal{M}$, dann ist L der Raum der beschränkten messbaren Funktionen.

Sei $(S, \mathcal{S}, \nu)$ ein σ-endlicher Massraum und $f : S \times M \to \mathbb{R}$ sei $\mathcal{S} \times \mathcal{M}$-messbar. Falls es eine messbare Funktion $g : S \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $\|f(s, \cdot)\| \leq g(s)$ für alle $s \in S$ und $\int g(s) \nu(\mathrm{d}s) < \infty$, dann gilt

$$\sup_{\mu \in \Gamma} \int \left| \int f(s, x) \, \nu(\mathrm{d}s) \right| \mu(\mathrm{d}x) \leq \sup_{\mu \in \Gamma} \int\!\!\int |f(s, x)| \, \mu(\mathrm{d}x) \, \nu(\mathrm{d}s) \leq \int g(s) \, \nu(\mathrm{d}s) < \infty$$

und $\int f(s, \cdot) \, \nu(\mathrm{d}s)$ kann als die Äquivalenzklasse $h \in L$ definiert werden, für die

$$h(x) = \begin{cases} \int f(s, x) \, \nu(\mathrm{d}s) & \text{if } \int |f(s, x)| \, \nu(\mathrm{d}s) < \infty, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 1.31. *Wir sagen, eine Funktion $u : S \to L$ ist* **messbar**, *falls es eine $\mathcal{S} \times \mathcal{M}$-messbare Funktion v gibt, so dass $v(s, \cdot) \in u(s)$ für jedes $s \in S$. Eine Halbgruppe $\{T(t)\}$ ist* **messbar**, *falls $T(\cdot)f$ für jedes $f \in L$ messbar ist. Der* **vollständige Generator** *$\hat{A}$ einer messbaren Kontraktionshalbgruppe $\{T(t)\}$ auf L ist die Menge der Funktionen*

$$\hat{A} = \{(f, g) \in L^2 : T(t)f - f = \int_0^t T(s)g \, \mathrm{d}s \text{ für alle } t \geq 0\} .$$

Wir bemerken, dass $\hat{A}$ im Normalfall nicht einwertig ist.

1.6. Approximationssätze

In diesem Abschnitt arbeiten wir auf Banachräumen L und L_n für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Die Abbildungen $\pi_n : L \to L_n$ seien beschränkte lineare Transformationen. Es gelte $\sup_n \|\pi_n\| < \infty$. Wir schreiben $f_n \to f$, falls $f_n \in L_n$, $f \in L$ und $\lim_{n\to\infty} \|f_n - \pi_n f\| = 0$.

Hilfssatz 1.32. *Seien $\{T_n(t)\}$ und $\{S(t)\}$ stark stetige Kontraktionshalbgruppen auf L_n und L mit den Generatoren $\mathfrak{A}_n$ and $\mathfrak{A}$. Sei $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$. Nehmen wir an, dass $\pi_n S(t) f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}_n)$ für alle $t \geq 0$ und dass $\mathfrak{A}_n \pi_n S(\cdot) f : [0, \infty) \to L_n$ eine stetige Funktion ist. Dann gilt für jedes $t \geq 0$*

$$T_n(t)\pi_n f - \pi_n S(t) f = \int_0^t T_n(t-s)(\mathfrak{A}_n \pi_n - \pi_n \mathfrak{A}) S(s) f \, \mathrm{d}s \, ,$$

und damit

$$\|T_n(t)\pi_n f - \pi_n S(t) f\| \leq \int_0^t \|(\mathfrak{A}_n \pi_n - \pi_n \mathfrak{A}) S(s) f\| \, \mathrm{d}s \, .$$

Beweis. Wir haben in Propositon 1.9 gezeigt, dass $S(s)f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$, und somit ist die rechte Seite der Behauptung wohldefiniert. Es folgt nun aus Proposition 1.9, dass $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(T_n(t-s)\pi_n S(s) f) = T_n(t-s)(\mathfrak{A}_n \pi_n - \pi_n \mathfrak{A}) S(s) f$ stetig in s ist. Die Behauptung folgt aus Hilfssatz 1.7. □

Hilfssatz 1.33. *Seien $\{T_n(t)\}$ und $\{T(t)\}$ stark stetige Kontraktionshalbgruppen auf L_n und L mit Generatoren $\mathfrak{A}_n$ and $\mathfrak{A}$. Sei D ein Kern für $\mathfrak{A}$. Nehmen wir weiter an, dass es für jedes $f \in D$ Funktionen $f_n \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}_n)$ gibt, so dass $f_n \to f$ und $\mathfrak{A}_n f \to \mathfrak{A} f$. Für $\lambda > 0$ sei A_n^λ die Yosida Approximation von $\mathfrak{A}_n$ und A^λ die Yosida Approximation von $\mathfrak{A}$. Dann konvergiert $A_n^\lambda \pi_n f \to A^\lambda f$ für jedes $f \in L$ und $\lambda > 0$.*

Beweis. Sei $f \in D$ und $g = (\lambda - \mathfrak{A})f$. Dann gibt es Funktionen $f_n \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}_n)$, so dass $f_n \to f$ und $\mathfrak{A}_n f_n \to \mathfrak{A}f$. Also konvergiert $(\lambda - \mathfrak{A}_n)f_n \to g$. Mit Hilfe von (1.7) und der Dissipativität von $\mathfrak{A}_n$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|A_n^\lambda \pi_n g - \pi_n A^\lambda g\| &= \left\|\lambda^2[(\lambda - \mathfrak{A}_n)^{-1} - \lambda^{-1}I]\pi_n g - \pi_n \lambda^2[(\lambda - \mathfrak{A})^{-1} - \lambda^{-1}I]g\right\| \\
&= \lambda^2 \left\|(\lambda - \mathfrak{A}_n)^{-1}\pi_n g - f_n + f_n - \pi_n(\lambda - \mathfrak{A})^{-1}g\right\| \\
&\le \lambda^2 \|(\lambda - \mathfrak{A}_n)^{-1}[\pi_n g - (\lambda - \mathfrak{A}_n)f_n]\| + \lambda^2\|f_n - \pi_n f\| \\
&\le \lambda\|\pi_n g - (\lambda - \mathfrak{A}_n)f_n\| + \lambda^2\|f_n - \pi_n f\| \;.
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck konvergiert nach 0. Somit konvergiert $\|A_n^\lambda \pi_n g - \pi_n A^\lambda g\| \to 0$ für jedes $g \in \mathcal{R}(\lambda - \mathfrak{A}|_D)$. Aus Proposition 1.28 wissen wir, dass $\mathcal{R}(\lambda - \mathfrak{A}|_D)$ dicht in L ist. Da die linearen Transformationen $A_n^\lambda \pi_n - \pi_n A^\lambda$ gleichmässig beschränkt sind (beachte $\|A_n^\lambda\| \le 2\lambda$ wegen (1.7)), folgt die Behauptung. □

Satz 1.34. *Seien $\{T_n(t)\}$ und $\{T(t)\}$ stark stetige Kontraktionshalbgruppen auf L_n und L mit Generatoren $\mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{A}$. Sei D ein Kern für $\mathfrak{A}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

i) *Für jedes $f \in L$ gilt $T_n(t)\pi_n f \to T(t)f$ für alle $t \ge 0$, gleichmässig auf beschränkten Intervallen.*

ii) *Für jedes $f \in L$ gilt $T_n(t)\pi_n f \to T(t)f$ für alle $t \ge 0$.*

iii) *Für jedes $f \in D$ existieren $f_n \in \mathfrak{D}(\mathfrak{A}_n)$, so dass $f_n \to f$ und $\mathfrak{A}_n f_n \to \mathfrak{A}f$*

Beweis. "i) ⇒ ii)" Trivial.

"ii) ⇒ iii)" Sei $\lambda > 0$, $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ und $g = (\lambda - \mathfrak{A})f$. Dann haben wir $f = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)g \,\mathrm{d}t$. Für jedes $n \ge 1$ definieren wir

$$f_n = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T_n(t)\pi_n g \,\mathrm{d}t = (\lambda - \mathfrak{A}_n)^{-1}\pi_n g \;,$$

siehe Proposition 1.12. Dann ist $f_n \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}_n)$. Mittels beschränkter Konvergenz folgt

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \lim_{n\to\infty} T_n(t)\pi_n g \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)g \,\mathrm{d}t = (\lambda - \mathfrak{A})^{-1}g = f \;.$$

Weiter gilt $(\lambda - \mathfrak{A}_n)f_n = \pi_n g \to g = (\lambda - \mathfrak{A})f$. Somit konvergiert $\mathfrak{A}_n f_n \to \mathfrak{A}f$.

"iii) $\Rightarrow$ i)" Sei $\lambda > 0$. Wir bezeichnen mit $\{T_n^\lambda(t)\}$ und $\{T^\lambda(t)\}$ die stark stetigen Kontraktionshalbgruppen, die durch die Yosida Approximationen A_n^λ and A^λ (Hilfssatz 1.17) erzeugt werden. Sei $f \in D$. Wir wählen nun f_n wie in iii). Dann gilt

$$\begin{aligned} T_n(t)\pi_n f - \pi_n T(t)f = T_n(t)(\pi_n f - f_n) + [(T_n(t) - T_n^\lambda(t))f_n] + T_n^\lambda(t)(f_n - \pi_n f) \\ + [T_n^\lambda(t)\pi_n f - \pi_n T^\lambda(t)f] + \pi_n[T^\lambda(t) - T(t)]f\,. \end{aligned}$$

Sei $t_0 > 0$. Wir bemerken, dass $\sup\{\|T_n(t)(\pi_n f - f_n)\| : 0 \le t \le t_0\} \le \|\pi_n f - f_n\|$ und $\sup\{\|T_n^\lambda(t)(f_n - \pi_n f)\| : 0 \le t \le t_0\} \le \|f_n - \pi_n f\|$ nach 0 konvergieren. Aus Proposition 1.22 folgt

$$\begin{aligned} \sup_{0\le t\le t_0} \|(T_n(t) - T_n^\lambda(t))f_n\| &\le t_0\|(\mathfrak{A}_n - A_n^\lambda)f_n\| \\ &\le t_0(\|\mathfrak{A}_n f_n - \pi_n\mathfrak{A}f\| + \|\pi_n(\mathfrak{A}f - A^\lambda f)\| + \|\pi_n A^\lambda f - A_n^\lambda \pi_n f\| \\ &\quad + \|A_n^\lambda(\pi_n f - f_n)\|)\,. \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 1.33 konvergiert dies nach $t_0\|\pi_n(\mathfrak{A}f - A^\lambda f)\| \le Kt_0\|\mathfrak{A}f - A^\lambda f\|$, wobei $K = \sup_n \|\pi_n\|$. Wir bemerken, dass $\|A_n^\lambda(t)\| \le 2\lambda$ wegen (1.7), und daher ist $A_n^\lambda T^\lambda(t)f$ stetig in t. Aus Hilfssatz 1.32 folgt dann

$$\sup_{0\le t\le t_0} \|T_n^\lambda(t)\pi_n f - \pi_n T^\lambda(t))f\| \le \int_0^{t_0} \|(A_n^\lambda \pi_n - \pi_n A^\lambda)T^\lambda(s)f\|\,\mathrm{d}s\,,$$

das nach Hilfssatz 1.33 auch nach 0 konvergiert. Schliesslich folgt aus Proposition 1.22

$$\sup_{0\le t\le t_0} \|\pi_n(T^\lambda(t) - T(t))f\| \le Kt_0\|A^\lambda f - \mathfrak{A}f\|\,.$$

Daher erhalten wir

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le t_0} \|T_n(t)\pi_n f - T(t)f\| \le 2Kt_0\|A^\lambda f - \mathfrak{A}f\|\,.$$

Lassen wir $\lambda \to \infty$, so konvergiert die rechte Seite nach 0 wegen Hilfssatz 1.17. Somit gilt die Aussage für $f \in D$. Da D dicht ist in L, gilt die Aussage für alle $f \in L$. □

Hilfssatz 1.35. *Sei B eine lineare Kontraktion auf L. Dann gilt*

$$\|B^n f - \mathrm{e}^{n(B-I)}f\| \le \sqrt{n}\|Bf - f\|$$

für alle $f \in L$ und $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $f \in L$ und $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|B^n f - B^k f\| \leq \|B^{|k-n|} f - f\| = \Big\| \sum_{j=0}^{|k-n|-1} B^j (Bf - f) \Big\| \leq |k-n| \, \|Bf - f\| \, .$$

Daher haben wir

$$\begin{aligned} \|B^n f - \mathrm{e}^{n(B-I)} f\| &= \Big\| B^n f - \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} B^k f \Big\| = \mathrm{e}^{-n} \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} (B^n f - B^k f) \Big\| \\ &\leq \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} |k-n| \frac{n^k}{k!} \|Bf - f\| \\ &\leq \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (k-n)^2 \frac{n^k}{k!} \mathrm{e}^{-n} \Big)^{1/2} \|Bf - f\| = \sqrt{n} \|Bf - f\| \, , \end{aligned}$$

wobei wir Jensens Ungleichung sowie Mittelwert und Varianz der Poisson Verteilung mit Parameter n verwendet haben. □

Satz 1.36. *Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei T_n eine lineare Kontraktion auf L_n, ε_n eine echt positive Zahl und $A_n = \varepsilon_n^{-1}(T_n - I)$. Es gelte, dass $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Sei weiter $\{T(t)\}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf L mit Generator $\mathfrak{A}$, und D ein Kern für $\mathfrak{A}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) *Für jedes $f \in L$ gilt, dass $T_n^{\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor} \pi_n f \to T(t) f$ für alle $t \geq 0$, gleichmässig auf beschränkten Intervallen.*

ii) *Für jedes $f \in L$ gilt, dass $T_n^{\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor} \pi_n f \to T(t) f$ für alle $t \geq 0$.*

iii) *Für jedes $f \in D$ gibt es eine Folge $f_n \in L_n$, so dass $f_n \to f$ und $A_n f_n \to \mathfrak{A} f$ für $n \to \infty$.*

Beweis. "i) ⇒ ii)" Trivial.
"ii) ⇒ iii)" Sei $\lambda > 0$, $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ und $g = (\lambda - \mathfrak{A}) f$. Nach Proposition 1.12 gilt $f = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t) g \, \mathrm{d}t$. Für jedes $n \geq 1$ definieren wir

$$f_n = \varepsilon_n \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda k \varepsilon_n} T_n^k \pi_n g = \varepsilon_n \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda k \varepsilon_n} T_n^{k\varepsilon_n/\varepsilon_n} \pi_n g \, .$$

Mittels beschränkter Konvergenz folgt nun

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda (k\varepsilon_n)} T_n^{(k\varepsilon_n)/\varepsilon_n} \pi_n g = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t) g \, \mathrm{d}t = f \, .$$

Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
(\lambda - A_n)f_n &= \lambda\varepsilon_n \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda k\varepsilon_n} T_n^k \pi_n g - (T_n - I)\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda k\varepsilon_n} T_n^k \pi_n g \\
&= \pi_n g + \lambda\varepsilon_n \pi_n g + \lambda\varepsilon_n \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda k\varepsilon_n} T_n^k \pi_n g + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda k\varepsilon_n} T_n^k \pi_n g - \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda k\varepsilon_n} T_n^{k+1} \pi_n g \\
&= \pi_n g + \lambda\varepsilon_n \pi_n g + (\lambda\varepsilon_n \mathrm{e}^{-\lambda\varepsilon_n} + \mathrm{e}^{-\lambda\varepsilon_n} - 1) T_n \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda k\varepsilon_n} T_n^k \pi_n g \;.
\end{aligned}
$$

Dieser Ausdruck konvergiert nach $\pi_n g$, also nach $g = (\lambda - \mathfrak{A})f$. Daher konvergiert $A_n f_n \to \mathfrak{A} f$.

"iii) $\Rightarrow$ i)" Sei $f \in D$. Wir wählen die Folge $\{f_n\}$ wie in iii) vorgeschlagen. Dann haben wir

$$
\begin{aligned}
T_n^{\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor} \pi_n f - \pi_n T(t) f = T_n^{\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor}(\pi_n f - f_n) + T_n^{\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor} f_n - \mathrm{e}^{\varepsilon_n \lfloor t/\varepsilon_n \rfloor A_n} f_n \\
+ \mathrm{e}^{\varepsilon_n \lfloor t/\varepsilon_n \rfloor A_n}(f_n - \pi_n f) + \mathrm{e}^{\varepsilon_n \lfloor t/\varepsilon_n \rfloor A_n} \pi_n f - \pi_n T(t) f \;.
\end{aligned}
$$

Da T_n eine Kontraktion ist, kovergiert $T_n^{\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor}(\pi_n f - f_n)$ gleichmässig nach 0. Aus $\mathrm{e}^{\varepsilon_n \lfloor t/\varepsilon_n \rfloor A_n} = \mathrm{e}^{\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor (T_n - I)}$ und Hilfssatz 1.3 folgt, dass auch $\mathrm{e}^{\varepsilon_n \lfloor t/\varepsilon_n \rfloor A_n}(f_n - \pi_n f)$ gleichmässig nach 0 konvergiert. Sei $t_0 > 0$. Nach Hilfssatz 1.35 haben wir

$$
\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{0 \le t \le t_0} \left\| T_n^{[t/\varepsilon_n]} f_n - \mathrm{e}^{\varepsilon_n [t/\varepsilon_n] A_n} f_n \right\| \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\left[\frac{t_0}{\varepsilon_n} \right] \right)^{1/2} \| \varepsilon_n A_n f_n \| = 0 \,.
$$

Wir haben schon gesehen, dass $\{\mathrm{e}^{tA_n}\}$ eine stark stetige Halbgruppe mit Generator A_n ist. Aus Hilfssatz 1.3 wissen wir weiter, dass es sich um eine Kontraktionshalbgruppe handelt. Nach Satz 1.34 gilt dann

$$
\mathrm{e}^{tA_n} \pi_n f \to T(t) f \;,
$$

gleichmässig auf beschränkten Intervallen. Dies zeigt, dass

$$
\mathrm{e}^{\varepsilon_n [t/\varepsilon_n] A_n} \pi_n f - \pi_n T(t) f
$$

gleichmässig nach 0 konvergiert, da $T(t)f$ stetig in t ist. Damit ist die Aussage für $f \in D$ gezeigt. Da D dicht in L ist und T_n eine Kontraktion ist, folgt die Aussage für $f \in L$. □

Korollar 1.37. *Sei $\{V(t) : t \geq 0\}$ eine Familie von linearen Kontraktionen auf L mit $V(0) = I$. Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf L mit Generator $\mathfrak{A}$. Sei D ein Kern für $\mathfrak{A}$. Falls für jedes $f \in D$ gilt, dass $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{-1}(V(\varepsilon)f - f) = \mathfrak{A}f$, dann gilt für jedes $f \in L$, dass $(V(t/n))^n f \to T(t)f$ für jedes $t \geq 0$, gleichmässig auf beschränkten Intervallen.*

Beweis. Wir setzen $T_n = V(t/n)$ und $\varepsilon_n = t/n$. Die Aussage folgt nun aus Satz 1.36 mit $f_n = f$. □

Korollar 1.38. *Let $\{T(t)\}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf L mit Generator $\mathfrak{A}$. Dann gilt für jedes $f \in L$, dass $(I - (t/n)\mathfrak{A})^{-n} f \to T(t)f$ für alle $t \geq 0$, gleichmässig auf beschränkten Intervallen. Alternativ, falls $\{\varepsilon_n\}$ eine Folge von echt positiven Zahlen ist, die gegen 0 konvergiert, dann gilt für jedes $f \in L$, dass $(I - \varepsilon_n\mathfrak{A})^{-\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor} f \to T(t)f$ für alle $t \geq 0$, gleichmässig auf beschränkten Intervallen.*

Beweis. Sei $V(t) = (I - t\mathfrak{A})^{-1}$. Dies ist wegen Proposition 1.12 wohldefiniert. Wir bezeichnen mit A^λ die Yosida Approximation von $\mathfrak{A}$. Dann gilt $A^\lambda \to \mathfrak{A}$. Also haben wir

$$\varepsilon^{-1}(V(\varepsilon)f - f) = \varepsilon^{-2}(\varepsilon^{-1} - \mathfrak{A})^{-1} f - \varepsilon^{-1} f = A^{\varepsilon^{-1}} f \,.$$

Aus Lemma 1.17 folgt nun, dass die Voraussetzungen von Korollar 1.37 erfüllt sind. Dies beweist die erste Aussage. Die zweite Aussage folgt analog zum Beweis von Korollar 1.37 aus Satz 1.36. □