

Vorlesungsnotizen

Markov Prozesse

HANSPETER SCHMIDLI

*Mathematisches Institut
der Universität zu Köln*

Inhaltsverzeichnis

0. Einführende Beispiele	1
0.1. Beispiel 1	1
0.2. Beispiel 2	4
1. Halbgruppentheorie	6
1.1. Grundlegende Eigenschaften	6
1.2. Der Satz von Hille–Yosida	10
1.3. Kerne	20
1.4. Mehrwertige Operatoren	20
1.5. Halbgruppen auf Funktionenräumen	21
1.6. Approximationssätze	22
2. Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmassen	28
2.1. Die Prohorov-Metrik	28
2.2. Der Satz von Prohorov	35
2.3. Schwache Konvergenz	37
2.4. Trennende Mengen	39
2.5. Der Raum $D_S[0, \infty)$	41
2.6. Die kompakten Mengen von $D_S[0, \infty)$	44
2.7. Konvergenz in Verteilung auf $D_S[0, \infty)$	47
2.8. Kriterien für relative Kompaktheit in $D_S[0, \infty)$	49
2.9. Weitere Kriterien für relative Kompaktheit in $D_S[0, \infty)$	54
3. Markov Prozesse	58
3.1. Markov Prozesse und Übergangskerne	58
3.2. Markov Sprungprozesse und Feller Prozesse	63
3.3. Das Martingalproblem: Allgemeines und Pfadigenschaften	72
3.4. Das Martingalproblem: Eindeutigkeit, die Markov-Eigenschaft und Dualität	81
3.5. Das Martingalproblem: Existenz	95
Literatur	116
Index	117

0. Einführende Beispiele

0.1. Beispiel 1

Sei $\{N_t\}$ ein Poisson Prozess mit Rate 1, das heisst, $\{N_t\}$ hat unabhängige Zuwächse, $N_0 = 0$ und

$$\mathbb{P}[N_{t+h} - N_t = n] = \frac{h^n}{n!} e^{-h}.$$

Betrachten wir den Prozess $\{X_t = x + N_t - ct\}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Mit $\{\mathcal{F}_t\}$ bezeichnen wir die natürliche Filtration bis zur Zeit t . Sei f eine reelle differenzierbare Funktion, so dass $\mathbb{E}[|f(X_t)| + |f'(X_t)| \mid X_0 = x] < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[f(X_{t+h}) \mid X_t = x] = \sum_{n=0}^{\infty} f(x + n - ch) \frac{h^n}{n!} e^{-h}.$$

Die Funktion ist differenzierbar bezüglich h in $h = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}[f(X_{t+h}) \mid X_t = x] - f(x)}{h} \\ = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x - ch) - f(x)}{h} + f(x - ch) \frac{e^{-h} - 1}{h} + \sum_{n=1}^{\infty} f(x + n - ch) \frac{h^{n-1}}{n!} e^{-h} \\ = -cf'(x) - f(x) + f(x + 1). \end{aligned}$$

Das kann als

$$\mathbb{E}[f(X_{t+h}) \mid X_t] = f(X_t) + (-cf'(X_t) + f(X_t + 1) - f(X_t))h + o(h)$$

geschrieben werden. Der Prozess hat also die infinitesimale Drift $(-cf'(X_t) + f(X_t + 1) - f(X_t)) dt$. Subtrahieren wir die Drift vom Prozess, dann sollten wir ein Martingale erhalten:

$$M_t = f(X_t) - \int_0^t (-cf'(X_u) + f(X_u + 1) - f(X_u)) du.$$

Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[M_{t+h} - M_t \mid \mathcal{F}_t] \\
&= \mathbb{E}\left[f(X_{t+h}) - f(X_t) - \int_0^h (-cf'(X_{t+s}) + f(X_{t+s} + 1) - f(X_{t+s})) \, ds \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= -f(X_t) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[f(X_t + n - ch) \frac{h^n}{n!} e^{-h} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^h (cf'(X_t + n - cs)s^n + f(X_t + n - cs)(s^n - ns^{n-1}) \frac{e^{-s}}{n!} \, ds \right] \\
&= -f(X_t) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[f(X_t + n - ch) \frac{h^n}{n!} e^{-h} - \int_0^h \left[f(X_t + n - cs) \frac{s^n}{n!} e^{-s} \right]' \, ds \right] \\
&= -f(X_t) + \sum_{n=0}^{\infty} f(X_t + n) \frac{0^n}{n!} = 0.
\end{aligned}$$

Somit haben wir eine einfache Methode gefunden, um Martingale zu konstruieren.

Von besonderem Interesse sind Martingale, bei denen der Kompensator verschwindet, das heisst,

$$-cf'(x) + f(x+1) - f(x) = 0.$$

Versuchen wir es mit einer Funktion der Form $f(x) = e^{rx}$. Dann ist r die Lösung der Gleichung

$$e^r - 1 - rc = 0.$$

Die Gleichung hat immer die Lösung $r = 0$. Ist $c > 0$ und $c \neq 1$, dann gibt es eine zweite Lösung $r \neq 0$. Sei im weiteren r diese zweite Lösung. Dann ist $\{e^{rX_t}\}$ ein Martingal. Dieses Beispiel ist allgemeiner, als die Funktionen, die wir in dieser Vorlesung betrachten werden. Wir werden uns hier mit beschränkten Funktionen beschäftigen.

Nehmen wir nun an, wir wollen die Grösse

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T g(X_s, s) e^{-\alpha s} \, ds + e^{-\alpha T} G(X_T) \mid X_0 = x\right]$$

berechnen, wobei $T > 0$ ein (endlicher) Horizont ist, $g : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Kostenfunktion, $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Schlusskostenfunktion und $\alpha \geq 0$ ein Diskontierungsfaktor. Um diese Grösse zu berechnen, betrachten wir für $t \leq T$ die Funktion

$$f(x, t) = e^{\alpha t} \mathbb{E}\left[\int_t^T g(X_s, s) e^{-\alpha s} \, ds + e^{-\alpha T} G(X_T) \mid X_t = x\right].$$

Wir nehmen an, dass diese Funktion stetig differenzierbar ist. Das wird bedeuten, dass wir Bedingungen an g stellen werden müssen. Es ist klar, dass $f(x, T) = G(x)$ gelten muss. Mit der Methode, die wir zur Martingalkonstruktion verwendet haben, erhalten wir, dass

$$f(X_t, t)e^{-\alpha t} - \int_0^t [f_t(X_s, s) - cf_x(X_s, s) + f(X_s + 1, s) - f(X_s, s) - \alpha f(X_s, s)]e^{-\alpha s} ds$$

ein Martingal ist, wobei f_t und f_x die partiellen Ableitungen bezeichnen. Die Martingaleigenschaft ergibt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_t^T g(X_s, s)e^{-\alpha s} ds + e^{-\alpha T} G(X_T) \mid X_t \right] &= f(X_t, t)e^{-\alpha t} \\ &= \mathbb{E} \left[f(X_T, T)e^{-\alpha T} - \int_t^T [f_t(X_s, s) - cf_x(X_s, s) \right. \\ &\quad \left. + f(X_s + 1, s) - f(X_s, s) - \alpha f(X_s, s)]e^{-\alpha s} ds \mid X_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[G(X_T)e^{-\alpha T} - \int_t^T [f_t(X_s, s) - cf_x(X_s, s) \right. \\ &\quad \left. + f(X_s + 1, s) - f(X_s, s) - \alpha f(X_s, s)]e^{-\alpha s} ds \mid X_t \right]. \end{aligned}$$

Daher haben wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_t^T [f_t(X_s, s) - cf_x(X_s, s) + f(X_s + 1, s) - f(X_s, s) \right. \\ \left. - \alpha f(X_s, s) + g(X_s, s)]e^{-\alpha s} ds \mid X_t = x \right] = 0. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$f_t(x, s) - cf_x(x, s) + f(x + 1, s) - f(x, s) - \alpha f(x, s) + g(x, s) = 0.$$

Die obige Gleichung heisst **Feynman–Kac Formel**.

Der Prozess $\{X_t\}$ hat noch eine weitere Eigenschaft. Sei $T(t)$ der Operator

$$(T(t)f)(x) = \mathbb{E}[f(X_t) \mid X_0 = x].$$

Da $\mathbb{E}[f(X_{t+s}) \mid X_0 = x] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_{t+s}) \mid X_t] \mid X_0 = x]$ gilt, erhalten wir die Eigenschaft $T(t+s) = T(s)T(t)$. Eine Familie von Operatoren mit dieser Eigenschaft heisst **Halbgruppe**. Wir werden Halbgruppen betrachten, und die Resultate auf Markov Prozesse übertragen.

0.2. Beispiel 2

Sei C eine offene, beschränkte und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ mit einem glatten Rand. Sei $f_b(x) : \partial C \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem Rand. Wir möchten nun eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ finden, deren zweite Ableitung beschränkt ist, und die die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x_1, x_2) = 0$$

erfüllt, so dass für alle $x_0 \in \partial C$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f_b(x_0)$$

gilt. Wir diskutieren zuerst das Problem der Eindeutigkeit der Lösung.

Nehmen wir also nun an, dass f eine Lösung des Problems ist. Sei $\{\mathbf{X}_t\}$ eine zweidimensionale Brownsche Bewegung, das heisst, $\{\mathbf{X}_t\}$ hat unabhängige Zuwächse, stetige Pfade, so dass $\mathbf{X}_t$ normalverteilt ist mit Mittelwert $(0, 0)^\top$ und Varianzmatrix $t\mathbf{I}$, wobei $\mathbf{I}$ die Identitätsmatrix bezeichnet. Sei τ der erste Zeitpunkt, wo $\{\mathbf{X}_t\}$ die Menge C verlässt. Man kann zeigen, dass $t^{-1}\mathbb{P}[\tau \leq t] \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$. Daher können wir die Stoppzeit τ in der folgenden Rechnung vernachlässigen. Da die Ableitung beschränkt sein muss, erhalten wir mit Hilfe der Taylorformel

$$\begin{aligned} & \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E}[f(\mathbf{X}_t) - f(x) \mid X_0 = x] \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x_1 + \sqrt{t}y_1, x_2 + \sqrt{t}y_2) - f(x_1, x_2)}{t} e^{-(y_1^2 + y_2^2)/2} dy_2 dy_1 \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x_1 + ty_1, x_2 + ty_2) - f(x_1, x_2)}{t^2} e^{-(y_1^2 + y_2^2)/2} dy_2 dy_1 \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2)}{t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2) + y_1 y_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1, x_2) + \frac{y_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x_1, x_2) \right) \\ &\quad \times e^{-(y_1^2 + y_2^2)/2} dy_2 dy_1 + o(1) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(x_1, x_2) \right) = 0. \end{aligned}$$

Wir werden später sehen, dass dies bedeutet, dass $\{f(\mathbf{X}_t)\}$ ein Martingal ist. Der Stoppsatz ergibt nun

$$f(x) = \mathbb{E}[f_b(\mathbf{X}_\tau) \mid X_0 = x].$$

Daher ist die Lösung eindeutig. Weiter lässt sich zeigen, dass die Funktion $f(x) = \mathbb{E}[f_b(\mathbf{X}_\tau) \mid X_0 = x]$ eine Lösung des obigen Problems ist, sofern sie zweimal differenzierbar ist. Damit haben wir auch die Existenz einer Lösung gezeigt.

Das Martingalproblem, das wir später betrachten werden ist ähnlich. Für unser Beispiel sei

$$\mathfrak{A} = \left\{ \left(f, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f \right) : f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2) \right\}.$$

Wir suchen dann einen Prozess $\{f(\mathbf{X}_t)\}$, so dass der Prozess

$$\left\{ f(\mathbf{X}_t) - \int_0^t g(\mathbf{X}_s) \, ds \right\}$$

für jedes $(f, g) \in \mathfrak{A}$ ein Martingal ist.

1. Halbgruppentheorie

Zuerst betrachten wir Halbgruppen, die nichts mit Stochastik zu tun haben. Es wird sich zeigen, dass die Theorie uns erlauben wird, auf einfache Weise Martingale zu konstruieren.

In diesem Kapitel arbeiten wir mit einem reellen Banachraum L mit der Norm $\|\cdot\|$. Mit I bezeichnen wir die Identitätsabbildung $I : L \rightarrow L, f \mapsto f$.

1.1. Grundlegende Eigenschaften

Definition 1.1. Eine Familie $\{T(t) : t \geq 0\}$ von beschränkten linearen Operatoren auf L heisst **Halbgruppe**, falls $T(0) = I$ und $T(s+t) = T(s)T(t)$ für alle $s, t \geq 0$. Eine Halbgruppe heisst **stark stetig**, falls $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)f = f$ für jedes $f \in L$. Die Halbgruppe heisst **Kontraktionshalbgruppe**, falls $\|T(t)\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$.

Definition 1.2. Für einen beschränkten linearen Operator B definieren wir die **Exponentialfunktion**

$$e^{tB} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k B^k$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$, wobei $B^0 = I$.

Es gilt die folgende Eigenschaft

$$\begin{aligned} e^{tB} e^{sB} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n B^n \frac{1}{m!} s^m B^m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!(k-n)!} t^n s^{k-n} B^{n+(k-n)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \frac{1}{k!} \binom{k}{n} t^n s^{k-n} B^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t+s)^k B^k = e^{(t+s)B}. \end{aligned}$$

Man sieht nun leicht, dass $\{T(t) = e^{tB} : t \geq 0\}$ eine stark stetige Halbgruppe ist.

Hilfssatz 1.3. Sei B eine lineare Kontraktion. Dann ist $e^{t(B-I)}$ für jedes $t \geq 0$ eine Kontraktion.

Beweis. Es folgt wie im Reellen, dass $e^{t(B-I)} = e^{-t} e^{tB}$. Also gilt

$$\|e^{t(B-I)}\| = e^{-t} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k \right\| \leq e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} 1 = 1.$$

□

Proposition 1.4. Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf L . Dann gibt es Konstanten $M \geq 1$ und $r \geq 0$, so dass

$$\|T(t)\| \leq Me^{rt}, \quad t \geq 0. \quad (1.1)$$

Beweis. Nehmen wir zuerst an, dass für alle $t_0 > 0$

$$\sup_{0 \leq s \leq t_0} \|T(s)\| = \infty$$

gilt. Dann gibt es eine Folge $\{t_n\}$, die nach 0 konvergiert, so dass $\|T(t_n)\|$ nach Unendlich konvergiert. Nach dem Banach-Steinhaus-Theorem müsste es ein $f \in L$ geben, so dass $\sup_n \|T(t_n)f\| = \infty$. Dann aber wäre $\{T(t)\}$ nicht stark stetig. Somit gibt es ein $t_0 > 0$ und ein $M \geq 1$, so dass $\|T(s)\| \leq M$ für $0 \leq s \leq t_0$. Sei $r = t_0^{-1} \log M$. Sei weiter $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq s < t_0$ so gewählt, dass $t = kt_0 + s$. Dann gilt

$$\|T(t)\| = \|T(s)T(t_0)^k\| \leq MM^k = M \exp\{t_0^{-1}(kt_0) \log M\} \leq Me^{rt}.$$

□

Korollar 1.5. Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf L . Dann ist für jedes $f \in L$ die Funktion $t \mapsto T(t)f$ stetig.

Beweis. Wegen Proposition 1.4 gibt es ein $M \geq 1$ und ein $r \geq 0$, so dass (1.1) gilt. Somit haben wir für $t \geq 0$ und $h \geq 0$

$$\|T(t+h)f - T(t)f\| = \|T(t)(T(h)f - f)\| \leq Me^{rt}\|T(h)f - f\|,$$

und für $0 \leq h \leq t$

$$\|T(t-h)f - T(t)f\| = \|T(t-h)(f - T(h)f)\| \leq Me^{rt}\|T(h)f - f\|.$$

Lassen wir $h \downarrow 0$ streben, folgt die Behauptung. □

Definition 1.6. Sei A ein (unbeschränkter) linearer Operator auf einem Unterraum von L . Wir bezeichnen den **Definitionsbereich** mit $\mathcal{D}(A)$ und den **Bildbereich** mit $\mathcal{R}(A)$. Der **Graph** von A ist die Menge

$$\mathcal{G}(A) = \{(f, Af) : f \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Der Operator A heisst **abgeschlossen**, falls $\mathcal{G}(A)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L \times L$ ist.

Sei Δ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$. Eine Funktion $u : \Delta \rightarrow L$ heisst **differenzierbar** oder (Riemann) **integrierbar** analog zu den Definitionen im Falle $L = \mathbb{R}$.

Hilfssatz 1.7. Sei $u : \Delta \rightarrow L$ eine stetige Funktion.

- i) Sei weiter B ein abgeschlossener linearer Operator auf L . Nehmen wir an, dass $u(t) \in \mathcal{D}(B)$ für alle $t \in \Delta$, dass Bu stetig ist, und dass sowohl u als auch Bu integrierbar über Δ sind. Dann ist $\int_{\Delta} u(t) \, dt \in \mathcal{D}(B)$ und

$$B \int_{\Delta} u(t) \, dt = \int_{\Delta} Bu(t) \, dt.$$

- ii) Ist $\int_{\Delta} \|u(t)\| \, dt < \infty$, dann ist u integrierbar über Δ und

$$\left\| \int_{\Delta} u(t) \, dt \right\| \leq \int_{\Delta} \|u(t)\| \, dt.$$

- iii) Ist u stetig differenzierbar und $\Delta = [a, b]$, dann gilt

$$\int_a^b \frac{d}{dt} u(t) \, dt = u(b) - u(a).$$

Beweis. i) Nehmen wir zuerst $\Delta = [a, b]$ an. Seien $\{t_i : 0 \leq i \leq n\}$ Zerlegungen des Intervalles, so dass $\sup\{t_i - t_{i-1}\} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Dann konvergieren

$$\sum_{i=1}^n u(t_i)(t_i - t_{i-1}) \rightarrow \int_a^b u(t) \, dt$$

und

$$B \left(\sum_{i=1}^n u(t_i)(t_i - t_{i-1}) \right) = \sum_{i=1}^n Bu(t_i)(t_i - t_{i-1}) \rightarrow \int_a^b Bu(t) \, dt.$$

Da B abgeschlossen ist, folgt die Behauptung. Ist $\Delta = [a, \infty)$, dann haben wir

$$\int_a^{a+n} u(t) \, dt \rightarrow \int_0^{\infty} u(t) \, dt$$

und

$$B \int_a^{a+n} u(t) \, dt = \int_a^{a+n} Bu(t) \, dt \rightarrow \int_0^{\infty} Bu(t) \, dt.$$

Da B abgeschlossen ist, folgt auch in diesem Falle die Behauptung. Analog folgen die Aussagen für $\Delta = (-\infty, b]$ und $\Delta = \mathbb{R}$.

- ii) und iii) Die Behauptungen folgen wie im Fall $L = \mathbb{R}$. □

Definition 1.8. Der infinitesimale Generator ist der lineare Operator

$$\mathfrak{A}f = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (T(t)f - f) ,$$

wobei $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ der Unterraum aller $f \in L$ ist, für die der Grenzwert existiert.

Proposition 1.9. Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf L mit infinitesimalem Generator $\mathfrak{A}$.

i) Ist $f \in L$ und $t \geq 0$, dann ist $\int_0^t T(s)f \, ds \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ und

$$T(t)f - f = \mathfrak{A} \int_0^t T(s)f \, ds .$$

ii) Ist $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ und $t \geq 0$, dann ist $T(t)f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ und

$$\frac{d}{dt} T(t)f = \mathfrak{A}T(t)f = T(t)\mathfrak{A}f .$$

iii) Ist $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ und $t \geq 0$, dann ist

$$T(t)f - f = \int_0^t \mathfrak{A}T(s)f \, ds = \int_0^t T(s)\mathfrak{A}f \, ds .$$

Beweis. i) Wir haben $\mathcal{D}(T(h)) = L$. Wegen Proposition 1.4 ist der Operator $T(h)$ abgeschlossen. Aus Hilfssatz 1.7 folgt mit Hilfe von Korollar 1.5, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(T(h) - I) \int_0^t T(s)f \, ds &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(s+h)f - T(s)f) \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)f \, ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)f \, ds . \end{aligned}$$

Aus Korollar 1.5 folgt, dass die rechte Seite nach $T(t)f - f$ konvergiert.

ii) Es gilt

$$\frac{1}{h}(T(h)T(t)f - T(t)f) = T(t) \frac{1}{h}(T(h)f - f) .$$

Daher haben wir wegen der Abgeschlossenheit von $T(t)$, dass $\mathfrak{A}T(t)f = T(t)\mathfrak{A}f$ und

$$\frac{1}{h}(T(h+t)f - T(t)f) = T(t) \frac{1}{h}(T(h)f - f) = \frac{1}{h}(T(h) - I)T(t)f .$$

Dies zeigt die Ableitung von rechts. Für $0 < h \leq t$ haben wir

$$\frac{1}{-h}(T(t-h)f - T(t)f) = T(t-h) \left(\frac{1}{h}(T(h)f - f) - \mathfrak{A}f \right) + T(t-h)\mathfrak{A}f .$$

Die Norm des ersten Terms konvergiert nach 0. Dies gibt mit Hilfe von Korollar 1.5 die Ableitung von links.

iii) Die letzte Behauptung folgt aus Hilfssatz 1.7 und ii). □

Korollar 1.10. Sei $\mathfrak{A}$ der infinitesimale Generator einer stark stetigen Halbgruppe $\{T(t)\}$ auf L . Dann ist $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ dicht in L und der Operator $\mathfrak{A}$ ist abgeschlossen.

Beweis. Wir haben in Proposition 1.9 bewiesen, dass $\int_0^t T(s)f \, ds \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$. Da $t^{-1} \int_0^t T(s)f \, ds \rightarrow f$ für $t \downarrow 0$, folgt dass $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ dicht in L ist. Sei $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(\mathfrak{A})$, so dass $f_n \rightarrow f$ und $\mathfrak{A}f_n \rightarrow g$. Wir bemerken zuerst, dass wegen Proposition 1.4 $T(t)f_n = T(t)(f_n - f) + T(t)f \rightarrow T(t)f$. Aus Proposition 1.9 folgt, dass $T(t)f_n - f_n = \int_0^t T(s)\mathfrak{A}f_n \, ds$. Daher gilt im Grenzwert $T(t)f - f = \int_0^t T(s)g \, ds$. Teilen wir den Ausdruck durch t und lassen $t \downarrow 0$, erhalten wir das Resultat. $\square$

1.2. Der Satz von Hille–Yosida

Definition 1.11. Sei A ein linearer abgeschlossener Operator auf L . Hat für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ die Gleichung $(\lambda - A)f = 0$ nur die Lösung $f = 0$, gilt $\mathcal{R}(\lambda - A) = L$ und ist $(\lambda - A)^{-1}$ ein beschränkter linearer Operator, dann sagen wir λ gehört zur **Resolventenmenge** $\rho(A)$ von A . Der Operator $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$ heisst **Resolvente** (in λ) von A .

Proposition 1.12. Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf L mit Generator $\mathfrak{A}$. Dann ist $(0, \infty) \subset \rho(\mathfrak{A})$ und

$$(\lambda - \mathfrak{A})^{-1}g = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)g \, dt$$

für alle $g \in L$ und alle $\lambda > 0$. Weiter gilt $\|(\lambda - \mathfrak{A})f\| \geq \lambda\|f\|$ für alle $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$.

Beweis. Sei $\lambda > 0$. Wir definieren $U_\lambda g = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)g \, dt$. Dann ist U_λ ein linearer Operator. Aus Hilfssatz 1.7 folgt, dass

$$\|U_\lambda g\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)g\| \, dt \leq \lambda^{-1} \|g\|. \quad (1.2)$$

Daher ist U_λ wohldefiniert und beschränkt.

Sei $g \in L$ und $h > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(T(h) - I)U_\lambda g &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} (T(t+h)g - T(t)g) \, dt \\ &= \frac{1}{h} \left(e^{\lambda h} \int_0^\infty e^{-\lambda(t+h)} T(t+h)g \, dt - \int_0^\infty e^{\lambda t} T(t)g \, dt \right) \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)g \, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)g \, dt. \end{aligned}$$

Lassen wir $h \downarrow 0$, zeigt sich, dass $U_\lambda g \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{A}U_\lambda g = \lambda U_\lambda g - g$, oder äquivalent dazu,

$$(\lambda - \mathfrak{A})U_\lambda g = g. \quad (1.3)$$

Nehmen wir nun an, dass $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$. Aus Proposition 1.9, Korollar 1.5 und Hilfssatz 1.7 folgt, dass

$$U_\lambda \mathfrak{A}g = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) \mathfrak{A}g \, dt = \int_0^\infty \mathfrak{A} e^{-\lambda t} T(t) g \, dt = \mathfrak{A} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) g \, dt = \mathfrak{A} U_\lambda g.$$

Daher gilt für $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$, dass

$$U_\lambda(\lambda - \mathfrak{A})g = (\lambda - \mathfrak{A})U_\lambda g = g. \quad (1.4)$$

Sei nun $g \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$, so dass $(\lambda - \mathfrak{A})g = 0$. Aus (1.4) erhalten wir $g = U_\lambda(\lambda - \mathfrak{A})g = U_\lambda 0 = 0$. Wegen (1.3) haben wir, dass $\mathcal{R}(\lambda - \mathfrak{A}) = L$. Aus (1.4) erhalten wir $(\lambda - \mathfrak{A})^{-1} = U_\lambda$.

Sei $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$. Aus (1.2) erhalten wir nun

$$\|f\| = \|U_\lambda(\lambda - \mathfrak{A})f\| \leq \lambda^{-1} \|(\lambda - \mathfrak{A})f\|.$$

□

Hilfssatz 1.13. *Sei A ein abgeschlossener Operator auf L . Dann ist $\rho(A)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.*

Beweis. Sei $\lambda \in \rho(A)$. Wählen wir $\mu \in \mathbb{R}$, so dass $|\mu - \lambda| < \|R_\lambda\|^{-1}$. Definieren wir

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n R_\lambda^{n+1}. \quad (1.5)$$

Wir haben

$$\|U\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - \mu|^n \|R_\lambda\|^{n+1} < \infty.$$

Also ist U ein beschränkter linearer Operator auf L . Weiter gilt, dass

$$\begin{aligned} U(\mu - A) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n R_\lambda^{n+1} (\lambda - A - (\lambda - \mu)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(\lambda - \mu)^n R_\lambda^n - (\lambda - \mu)^{n+1} R_\lambda^{n+1}] = I \end{aligned}$$

und analog, dass $(\mu - A)U = I$. Ist $(\mu - A)f = 0$, so ist $f = U(\mu - A)f = 0$ und $\mathcal{R}(\mu - A) = L$. Da $U = (\mu - A)^{-1}$, ist $\mu \in \rho(A)$. □

Definition 1.14. Ein linearer Operator A auf L heisst **dissipativ**, falls $\|\lambda f - Af\| \geq \lambda \|f\|$ für jedes $f \in \mathcal{D}(A)$ und jedes $\lambda > 0$.

Hilfssatz 1.15. Sei A ein dissipativer linearer Operator auf L und sei $\lambda > 0$. Dann ist A genau dann abgeschlossen, falls die Menge $\mathcal{R}(\lambda - A)$ abgeschlossen ist.

Beweis. Nehmen wir zuerst an, dass A abgeschlossen ist. Sei $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ eine Folge, so dass $(\lambda - A)f_n \rightarrow h$ für ein $h \in L$. Dann ist $\|f_n - f_m\| \leq \lambda^{-1}\|(\lambda - A)(f_n - f_m)\|$ eine Cauchy-Folge. Daher gibt es ein $f \in L$, so dass $f_n \rightarrow f$ und $Af_n \rightarrow \lambda f - h$. Da A abgeschlossen ist, haben wir $f \in \mathcal{D}(A)$ und $(\lambda - A)f = h$. Somit ist $\mathcal{R}(\lambda - A)$ abgeschlossen.

Nehmen wir nun an, dass $\mathcal{R}(\lambda - A)$ abgeschlossen ist. Sei $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ eine Folge, so dass $f_n \rightarrow f$ und $Af_n \rightarrow g$. Dann konvergiert $(\lambda - A)f_n$ nach $\lambda f - g$. Daher gibt es ein $h \in \mathcal{D}(A)$, so dass $\lambda f - g = (\lambda - A)h$. Es gilt, dass $\|f_n - h\| \leq \lambda^{-1}\|(\lambda - A)(f_n - h)\| \rightarrow 0$, und somit gilt $h = f$. Damit ist A abgeschlossen. $\square$

Hilfssatz 1.16. Sei A ein dissipativer, abgeschlossener und linearer Operator auf L . Falls $\rho(A) \cap (0, \infty) \neq \emptyset$, dann ist $(0, \infty) \subset \rho(A)$.

Beweis. Sei $\{\lambda_n\} \subset \rho(A) \cap (0, \infty)$ eine Folge, so dass $\lambda_n \rightarrow \lambda$ für ein $\lambda > 0$. Sei $f \in \mathcal{D}(A)$, so dass $(\lambda - A)f = 0$. Dann gilt

$$\|f\| \leq \lambda^{-1}\|(\lambda - A)f\| = 0,$$

und somit ist $f = 0$.

Sei $g \in L$. Wir definieren $g_n = (\lambda - A)(\lambda_n - A)^{-1}g$. Wir bemerken, dass

$$\|(\lambda_n - A)^{-1}g\| \leq \lambda_n^{-1}\|(\lambda_n - A)(\lambda_n - A)^{-1}g\| = \lambda_n^{-1}\|g\|. \quad (1.6)$$

Dann gilt

$$\|g_n - g\| = \|((\lambda - A) - (\lambda_n - A))(\lambda_n - A)^{-1}g\| \leq \frac{|\lambda_n - \lambda|}{\lambda_n}\|g\| \rightarrow 0.$$

Daher ist $\mathcal{R}(\lambda - A)$ dicht in L . Aus Hilfssatz 1.15 folgt, dass $\mathcal{R}(\lambda - A)$ eine abgeschlossene Menge ist. Somit ist $\mathcal{R}(\lambda - A) = L$.

Aus (1.6) folgt, dass $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}$. Somit haben wir $\lambda \in \rho(A)$, und die Menge $\rho(A) \cap (0, \infty)$ ist abgeschlossen in $(0, \infty)$. Da nach Hilfssatz 1.13 die Menge auch offen in $(0, \infty)$ ist, haben wir, dass $\rho(A) \cap (0, \infty) = (0, \infty)$. $\square$

Hilfssatz 1.17. Sei A ein dissipativer, abgeschlossener und linearer Operator auf L . Nehmen wir an, dass $\mathcal{D}(A)$ dicht in L ist, und dass $(0, \infty) \subset \rho(A)$. Für jedes $\lambda > 0$ definieren wir $A_\lambda = \lambda A(\lambda - A)^{-1}$. Der Operator A_λ heisst **Yosida-Approximation** von A . Dann gilt:

- i) Für jedes $\lambda > 0$ ist A_λ ein beschränkter linearer Operator auf L , und $\{e^{tA_\lambda}\}$ ist eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf L mit Generator A_λ .
- ii) Wir haben $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$ für alle $\lambda, \mu > 0$.
- iii) Für jedes $f \in \mathcal{D}(A)$ gilt, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda f = Af$.

Beweis. i) Wir bemerken zuerst, dass (siehe (1.6)) $\|R_\lambda\| \leq \lambda^{-1}$. Es folgt dann, dass

$$A_\lambda = \lambda(\lambda - (\lambda - A))(\lambda - A)^{-1} = \lambda^2 R_\lambda - \lambda. \quad (1.7)$$

Daher ist A_λ beschränkt, und

$$\|e^{tA_\lambda}\| = e^{-\lambda t} \|e^{t\lambda^2 R_\lambda}\| \leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 \|R_\lambda\|} \leq 1$$

gilt für alle $t \geq 0$. Dass $\{e^{tA_\lambda}\}$ eine stark stetige Halbgruppe ist, haben wir schon gezeigt. Also ist $\{e^{tA_\lambda}\}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe.

Bemerken wir, dass

$$t^{-1}(e^{tA_\lambda} - I) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} A_\lambda^n$$

für $t \downarrow 0$ nach A_λ konvergiert. Daher ist A_λ der Generator der Halbgruppe $\{e^{tA_\lambda}\}$.

ii) Wir zeigen zuerst $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$. Sei $\lambda > 0$ fest, und definieren wir die Menge $H = \{\mu > 0 : R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda\}$. Trivialerweise ist $\lambda \in H$, und somit $H \neq \emptyset$. Wir zeigen zuerst, dass H offen in $(0, \infty)$ ist. Sei $\mu \in H$ und $\eta > 0$, so dass $|\eta - \mu| < \|R_\mu\|^{-1}$. Dann folgt aus (1.5)

$$R_\lambda R_\eta = R_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \eta)^n R_\mu^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \eta)^n R_\mu^{n+1} R_\lambda = R_\eta R_\mu. \quad (1.8)$$

Dies zeigt, dass $\eta \in H$. Wir zeigen nun, dass H abgeschlossen in $(0, \infty)$ ist. Sei $\{\mu_n\} \subset H$ eine konvergente Folge, die nach $\mu > 0$ konvergiert. Wählen wir ein n , so dass $|\mu_n - \mu| < \mu/2$. Dann ist $\mu_n > \mu/2$. Da $\|R_{\mu_n}\| \leq \mu_n^{-1}$, haben wir $|\mu_n - \mu| < \mu/2 < \mu_n \leq \|R_{\mu_n}\|^{-1}$. Ersetzen wir in (1.8) die Variablen μ und η durch μ_n und μ respektive, dann erhalten wir $\mu \in H$. Somit gilt $H = (0, \infty)$. Aus (1.7) folgt nun $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$.

iii) Sei $g \in \mathcal{D}(A)$. Dann gilt

$$\|(\lambda R_\lambda - I)g\| = \|R_\lambda(\lambda - (\lambda - A))g\| \leq \lambda^{-1}\|Ag\| \rightarrow 0$$

für $\lambda \rightarrow \infty$. Sei nun $g \in L$. Da $\mathcal{D}(A)$ dicht in L ist, gibt es eine Folge $\{g_n\} \subset \mathcal{D}(A)$, die nach g konvergiert. Da $\|\lambda R_\lambda - I\| \leq \lambda\|R_\lambda\| + 1 \leq 2$, erhalten wir, dass $\|(\lambda R_\lambda - I)(g - g_n)\|$ für $n \rightarrow \infty$ nach 0 konvergiert. Dies impliziert, dass $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R_\lambda g = g$. Sei nun $f \in \mathcal{D}(A)$. Dann gilt

$$A_\lambda f = \lambda A R_\lambda f = \lambda^2 R_\lambda f - \lambda(\lambda - A)R_\lambda f = \lambda^2 R_\lambda f - \lambda R_\lambda(\lambda - A)f = \lambda R_\lambda A f \rightarrow A f$$

für $\lambda \rightarrow \infty$. □

Hilfssatz 1.18. Seien B und C beschränkte lineare Operatoren auf L , so dass $BC = CB$, $\|e^{tB}\| \leq 1$ und $\|e^{tC}\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$. Dann gilt

$$\|(e^{tB} - e^{tC})f\| \leq t\|(B - C)f\|$$

für jedes $f \in L$ und $t \geq 0$.

Beweis. Aus Hilfssatz 1.7 und der Kommutivität von B und C folgt

$$\begin{aligned} e^{tB}f - e^{tC}f &= \int_0^t \frac{d}{ds}(e^{sB}e^{(t-s)C}f) ds \\ &= \int_0^t e^{sB}(B - C)e^{(t-s)C}f ds \\ &= \int_0^t e^{sB}e^{(t-s)C}(B - C)f ds. \end{aligned}$$

Ziehen wir die Norm ins Integral, folgt die Behauptung. □

Satz 1.19. (Satz von Hille–Yosida) Ein linearer Operator A auf L ist genau dann der Generator einer stark stetigen Kontraktionshalbgruppe auf L , falls

- i) $\mathcal{D}(A)$ ist dicht in L ,
- ii) A ist dissipativ und
- iii) $\mathcal{R}(\lambda - A) = L$ für ein $\lambda > 0$.

Beweis. Ist A der Generator einer stark stetigen Kontraktionshalbgruppe $\{T(t)\}$, so sind die Bedingungen i)–iii) erfüllt, wegen Korollar 1.10 und Proposition 1.12.

Seien nun die Bedingungen i)–iii) erfüllt. Aus Hilfssatz 1.15 folgt, dass A abgeschlossen ist. Hilfssatz 1.16 und dessen Beweis zeigen, dass $(0, \infty) \subset \rho(A)$. Definieren wir die Yosida-Approximation A_λ wie in Hilfssatz 1.17. Aus Hilfssatz 1.17 wissen wir, dass $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$. Setzen wir $T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$. Dann ist $\{T_\lambda(t)\}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf L (Hilfssatz 1.17). Sei $f \in \mathcal{D}(A)$. Wegen Hilfssatz 1.18 haben wir

$$\|(T_\lambda(t) - T_\mu(t))f\| \leq t\|(A_\lambda - A_\mu)f\|.$$

Da $A_\lambda f$ nach Af konvergiert, existiert $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)f$ für alle $t \geq 0$. Der Grenzübergang ist gleichmässig auf beschränkten Intervallen. Wir bezeichnen den Grenzwert mit $T(t)f$.

Sei $g \in L$. Dann gibt es eine Folge $\{g_n\} \subset \mathcal{D}(A)$, die nach g konvergiert, da $\mathcal{D}(A)$ dicht in L ist. Wir haben dann

$$(T_\lambda(t) - T_\mu(t))g = T_\lambda(t)(g - g_n) + (T_\lambda(t) - T(t))g_n + (T(t) - T_\mu(t))g_n + T_\mu(t)(g_n - g).$$

Da T_λ und T_μ Kontraktionshalbgruppen sind, können der erste und der letzte Term auf der rechten Seite beliebig klein gemacht werden, indem man n gross genug wählt. Der zweite und dritte Term können beliebig klein gemacht werden, indem man λ und μ gross genug wählt. Somit konvergiert auch $\{T_\lambda(t)g\}$, und wegen den obigen Betrachtungen gleichmässig auf beschränkten Intervallen. Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $T(t)g$. Es gilt $T(0)g = g$ und $\|T(t)\| \leq 1$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} T(s+t)g - T(s)T(t)g \\ = (T(s+t) - T_\lambda(s+t))g + T_\lambda(s)(T_\lambda(t) - T(t))g + (T_\lambda(s) - T(s))T(t)g. \end{aligned}$$

Lassen wir $\lambda \rightarrow \infty$ folgt, dass $\{T(t)\}$ eine Kontraktionshalbgruppe ist. Wir bemerken, dass

$$\|T(t)g - g\| \leq \|T(t)g - T_\lambda(t)g\| + \|T_\lambda(t)g - g\|.$$

Der erste Term kann für $t \in (0, 1)$ gleichmässig klein gemacht werden, indem wir λ gross genug wählen. Der zweite Term kann für t klein genug beliebig klein gemacht werden, da $\{T_\lambda(t)\}$ stark stetig ist. Daher ist auch $\{T(t)\}$ stark stetig.

Sei $\mathfrak{A}$ der Generator von $\{T(t)\}$. Wählen wir $g \in \mathcal{D}(A)$. Wir wissen (Hilfssatz 1.17), dass A_λ der Generator von $\{T_\lambda(t)\}$ ist. Aus Proposition 1.9 folgt, dass

$$T_\lambda(t)g - g = \int_0^t T_\lambda(s)A_\lambda g \, ds.$$

Da

$$T_\lambda(s)A_\lambda g - T(s)Ag = T_\lambda(s)(A_\lambda g - Ag) + (T_\lambda(s) - T(s))Ag ,$$

folgt aus Hilfsatz 1.17, dass $T_\lambda(s)A_\lambda g$ gleichmässig in $[0, t]$ nach $T(s)Ag$ konvergiert. Daher haben wir

$$T(t)g - g = \int_0^t T(s)Ag \, ds .$$

Teilen wir durch t und lassen $t \downarrow 0$, erhalten wir $\mathfrak{A}g = Ag$. Daher ist $\mathfrak{A}$ eine Erweiterung von A auf $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$.

Sei nun $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ und wählen wir $\lambda > 0$. Dann gilt $\mathcal{R}(\lambda - A) = L$. Aus Proposition 1.12 wissen wir, dass $\lambda \in \rho(\mathfrak{A})$. Sei $h = (\lambda - A)^{-1}(\lambda - \mathfrak{A})f$. Dann ist $h \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(\mathfrak{A})$. Daher gilt

$$(\lambda - \mathfrak{A})h = (\lambda - A)h = (\lambda - \mathfrak{A})f ,$$

als $(\lambda - \mathfrak{A})(h - f) = 0$. Daher gilt $h - f = 0$ und damit $f \in \mathcal{D}(A)$. Das bedeutet, dass $\mathcal{D}(\mathfrak{A}) = \mathcal{D}(A)$. Also haben wir gezeigt, dass $\mathfrak{A} = A$. $\square$

Proposition 1.20. *Sei A ein dissipativer linearer Operator auf L . Sei $u : [0, \infty) \rightarrow L$ eine stetige Funktion, so dass $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ für alle $t > 0$, $Au : (0, \infty) \rightarrow L$ stetig ist und*

$$u(t) = u(\varepsilon) + \int_\varepsilon^t Au(s) \, ds$$

für alle $0 < \varepsilon < t$. Dann ist $\|u(t)\| \leq \|u(0)\|$ für alle $t > 0$.

Beweis. Wählen wir eine Zerlegung $0 < \varepsilon = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$. Dann gilt

$$u(t_i) - u(t_{i-1}) = \left(u(t) - \int_{t_i}^t Au(s) \, ds \right) - \left(u(t) - \int_{t_{i-1}}^t Au(s) \, ds \right) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} Au(s) \, ds .$$

Da der Operator dissipativ ist, haben wir

$$\|u(t_i) - (t_i - t_{i-1})Au(t_i)\| = (t_i - t_{i-1}) \|(t_i - t_{i-1})^{-1}u(t_i) - Au(t_i)\| \geq \|u(t_i)\| .$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &= \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^n (\|u(t_i)\| - \|u(t_{i-1})\|) \\
&\leq \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^n (\|u(t_i) - (t_i - t_{i-1})Au(t_i)\| - \|u(t_i) - (u(t_i) - u(t_{i-1}))\|) \\
&= \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^n \left(\|u(t_i) - (t_i - t_{i-1})Au(t_i)\| - \left\| u(t_i) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} Au(s) \, ds \right\| \right) \\
&\leq \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^n \left\| (t_i - t_{i-1})Au(t_i) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} Au(s) \, ds \right\| \\
&= \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^n \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (Au(t_i) - Au(s)) \, ds \right\| \\
&\leq \|u(\varepsilon)\| + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|Au(t_i) - Au(s)\| \, ds.
\end{aligned}$$

Die Funktion $Au(t)$ ist auf dem Intervall $[\varepsilon, t]$ gleichmässig stetig. Lassen wir also $\max\{t_i - t_{i-1}\}$ gegen Null konvergieren, so folgt, dass $\|u(t)\| \leq \|u(\varepsilon)\|$. Lässt man $\varepsilon \downarrow 0$, folgt die Behauptung. $\square$

Proposition 1.21. Seien $\{T(t)\}$ und $\{S(t)\}$ zwei stark stetige Kontraktionshalbgruppen auf L mit den Generatoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, respektive. Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, dann gilt $T(t) = S(t)$ für alle $t \geq 0$.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$. Dann folgt aus Proposition 1.9

$$(T(t) - S(t))f - (T(\varepsilon) - S(\varepsilon))f = \int_{\varepsilon}^t \mathfrak{A}(T(s) - S(s))f \, ds.$$

Nach Korollar 1.5 ist $(T(t) - S(t))f$ stetig in t . Aus

$$\mathfrak{A}(T(t) - S(t))f = \lambda(T(t) - S(t))f - (\lambda - \mathfrak{A})(T(t) - S(t))f$$

folgt aus der Dissipativität, dass auch $\mathfrak{A}(T(t) - S(t))f$ stetig in t ist. Also impliziert Proposition 1.20

$$\|(T(t) - S(t))f\| \leq \|f - f\| = 0.$$

Nach Satz 1.19 ist $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ dicht in L . Daher gilt wegen der Stetigkeit $T(t)f = S(t)f$ für alle $f \in L$. $\square$

Proposition 1.22. Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf L mit Generator $\mathfrak{A}$. Sei A_λ die Yosida-Approximation von $\mathfrak{A}$. Dann gilt

$$\|e^{tA_\lambda} f - T(t)f\| \leq t\|A_\lambda f - \mathfrak{A}f\|$$

für jedes $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$, $t \geq 0$, $\lambda > 0$. Insbesondere gilt für jedes $f \in L$, dass $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda} f = T(t)f$ gleichmässig auf beschränkten Intervallen.

Beweis. Aus dem Beweis von Satz 1.19 folgt, dass es eine Halbgruppe $\{S(t)\}$ mit Generator $\mathfrak{B}$ gibt, so dass die Aussage für $\{S(t)\}$ gilt. Aber nach Proposition 1.21 gilt $T(t) = S(t)$. $\square$

Korollar 1.23. Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf L mit Generator $\mathfrak{A}$. Für $M \subset L$ sei

$$\Lambda_M = \{\lambda > 0 : \lambda(\lambda - \mathfrak{A})^{-1}|_M : M \rightarrow M\}.$$

Falls M eine abgeschlossene konvexe Untermenge von L und Λ_M unbeschränkt ist, oder falls M ein abgeschlossener Unterraum von L und Λ_M nicht leer ist, dann ist $T(t)|_M : M \rightarrow M$ für alle $t \geq 0$.

Beweis. Da $\mathfrak{A}$ dissipativ ist, gilt $\|(\lambda - \mathfrak{A})^{-1}f\| \leq \lambda^{-1}\|f\|$. Sei $\lambda, \mu > 0$ und $\mu < 2\lambda$. Aus dem Beweis von Hilfssatz 1.13, folgt dass

$$\mu(\mu - \mathfrak{A})^{-1} = \frac{\mu}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)^n (\lambda(\lambda - \mathfrak{A})^{-1})^{n+1}.$$

Ist M abgeschlossen und konvex, so folgt aus $\lambda \in \Lambda_M$, dass $(0, \lambda] \subset \Lambda_M$. Ist M ein abgeschlossener Unterraum, dann impliziert $\lambda \in \Lambda_M$, dass $(0, 2\lambda) \subset \Lambda_M$. Dies bedeutet in beiden Fällen, dass $\Lambda_M = (0, \infty)$. Aus (1.7) folgern wir, dass

$$e^{tA_\lambda} = e^{-\lambda t} e^{t\lambda(\lambda - \mathfrak{A})^{-1}} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} (\lambda(\lambda - \mathfrak{A})^{-1})^n$$

für alle $t \geq 0$ und $\lambda > 0$. Da M abgeschlossen ist, folgt die Behauptung aus Proposition 1.22. $\square$

Definition 1.24. Ein linearer Operator A auf L heisst **abschliessbar**, falls es eine abgeschlossene Erweiterung von A gibt. Ist A abschliessbar, so bezeichnen wir mit $\bar{A}$ den **Abschluss** von A , das heisst, die minimale abgeschlossene Erweiterung von A .

Es gilt somit $\overline{\mathcal{G}(A)} = \mathcal{G}(\bar{A})$.

Hilfssatz 1.25. Sei A ein dissipativer linearer Operator auf L , so dass $\mathcal{D}(A)$ dicht in L ist. Dann ist A abschliessbar, $\bar{A}$ ist dissipativ und $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$ für jedes $\lambda > 0$.

Beweis. Um zu zeigen, dass A abschliessbar ist, genügt es zu zeigen, dass für jedes Paar von Folgen $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ und $\{g_n\} \subset \mathcal{D}(A)$, so dass $\lim f_n = \lim g_n$ und beide Grenzwerte $\lim Af_n$ und $\lim Ag_n$ existieren, gilt, dass $\lim Af_n = \lim Ag_n$. Betrachten wir $\{f_n - g_n\}$, so brauchen wir bloss zu zeigen, dass für eine Folge $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(A)$, so dass $f_n \rightarrow 0$ und $\lim Af_n = g$, gelten muss, dass $g = 0$. Da $\mathcal{D}(A)$ dicht ist in L , gibt es eine Folge $\{g_m\} \subset \mathcal{D}(A)$, so dass $g_m \rightarrow g$. Sei $\lambda > 0$. Da A dissipativ ist, haben wir

$$\|(1 - \lambda^{-1}A)g_m - g\| = \lambda^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\lambda - A)(g_m + \lambda f_n)\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_m + \lambda f_n\| = \|g_m\|.$$

Lassen wir $\lambda \rightarrow \infty$, erhalten wir $\|g_m - g\| \geq \|g_m\|$. Das bedeutet, dass $\|g_m\| \rightarrow 0$, also $g = 0$.

Sei $f \in \mathcal{D}(\bar{A})$. Sei $\{(f_n, g_n)\} \subset \mathcal{G}(A)$, so dass $(f_n, g_n) \rightarrow (f, \bar{A}f)$. Dann gilt $\|\lambda f_n - Af_n\| \geq \lambda \|f_n\|$. Lassen wir $n \rightarrow \infty$, erhalten wir $\|\lambda f - \bar{A}f\| \geq \lambda \|f\|$. Somit ist $\bar{A}$ dissipativ.

Es ist klar, dass $\mathcal{R}(\lambda - A) \subset \mathcal{R}(\lambda - \bar{A}) \subset \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}$. Weiter folgt aus Hilfssatz 1.15, dass $\mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$ abgeschlossen ist. Daher ist $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} \subset \mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$. $\square$

Wir können nun eine alternative Form des Satzes von Hille–Yosida beweisen.

Satz 1.26. Ein linearer Operator A ist abschliessbar und der Abschluss $\bar{A}$ ist der Generator einer stark stetigen Kontraktionshalbgruppe auf L , genau dann, wenn

- i) $\mathcal{D}(A)$ ist dicht in L ,
- ii) A ist dissipativ und
- iii) $\mathcal{R}(\lambda - A)$ ist dicht in L für ein $\lambda > 0$.

Beweis. Sei A abschliessbar und $\bar{A}$ der Generator einer stark stetigen Kontraktionshalbgruppe. Dann muss gelten, dass $\mathcal{D}(A)$ dicht ist in $\mathcal{D}(\bar{A})$. Aus Satz 1.19 wissen wir, dass $\mathcal{D}(\bar{A})$ dicht ist in L . Somit ist auch $\mathcal{D}(A)$ dicht in L . Da nach Satz 1.19 die Erweiterung $\bar{A}$ dissipativ ist, muss auch A dissipativ sein. Wir wissen weiter aus Satz 1.19, dass es ein $\lambda > 0$ gibt, so dass $\mathcal{R}(\lambda - \bar{A}) = L$. Aus Hilfssatz 1.25 erhalten wir $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \mathcal{R}(\lambda - \bar{A}) = L$. Somit ist $\mathcal{R}(\lambda - A)$ dicht in L .

Nehmen wir nun an, dass die Bedingungen erfüllt sind. Nach Hilfssatz 1.25 ist A abschliessbar, $\bar{A}$ ist dissipativ und $\mathcal{R}(\lambda - \bar{A}) = \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = L$ für ein $\lambda > 0$. Dann ist auch $\mathcal{D}(\bar{A})$ dicht in L . Die Aussage folgt nun aus dem Satz von Hille–Yosida. $\square$

1.3. Kerne

Definition 1.27. Sei A ein abgeschlossener linearer Operator auf L . Ein Unterraum D von $\mathcal{D}(A)$ heisst **Kern** für A , falls der Abschluss der Einschränkung von A auf D gleich A ist, d.h. $\overline{A|_D} = A$.

Proposition 1.28. Sei $\mathfrak{A}$ der Generator einer stark stetigen Kontraktionshalbgruppe auf L . Ein Unterraum D von $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ ist genau dann ein Kern für $\mathfrak{A}$, falls D dicht in L ist und $\mathcal{R}(\lambda - \mathfrak{A}|_D)$ dicht in L ist für ein $\lambda > 0$.

Beweis. Da $\mathfrak{A}$ dissipativ ist, ist auch $\mathfrak{A}|_D$ dissipativ. Sei D ein Kern für A . Dann folgen die Bedingungen aus Satz 1.26. Seien die Bedingungen erfüllt. Dann erzeugt $\overline{\mathfrak{A}|_D}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf L (Satz 1.26). Es folgt, dass $\mathfrak{A}$ eine Erweiterung von $\overline{\mathfrak{A}|_D}$ ist. Aus der Konstruktion der Halbgruppe in Satz 1.19 folgt, dass die beiden Halbgruppen identisch sein müssen. Also ist $\overline{\mathfrak{A}|_D} = A$. $\square$

1.4. Mehrwertige Operatoren

Definition 1.29. Ein **mehrwertiger Operator** A auf L ist eine Teilmenge von L^2 . Der **Definitionsbereich** ist die Menge $\mathcal{D}(A) = \{f : \exists g, (f, g) \in A\}$ und der **Bildbereich** ist die Menge $\mathcal{R}(A) = \{g : \exists f, (f, g) \in A\}$. A heisst **linear**, falls A ein Unterraum von L^2 ist. Ist A linear, dann heisst der Operator **einwertig**, falls $(0, g) \in A$ impliziert, dass $g = 0$. Ist A linear, dann heisst A **dissipativ**, falls $\|\lambda f - g\| \geq \lambda \|f\|$ für alle $(f, g) \in A$ und alle $\lambda > 0$. Der **Abschluss** $\bar{A}$ von A ist der übliche Abschluss. Weiter definieren wir $\lambda - A = \{(f, \lambda f - g) : (f, g) \in A\}$.

Hilfssatz 1.30. Sei $A \subset L^2$ linear und dissipativ. Dann ist

$$A_0 = \{(f, g) \in \bar{A} : g \in \overline{\mathcal{D}(A)}\}$$

einwertig und $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} = \mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$ für jedes $\lambda > 0$.

Beweis. Sei $(0, g) \in A_0$. Dann gibt es eine Folge $\{(g_n, h_n)\} \subset A$, so dass $g_n \rightarrow g$. Wegen der Linearität gilt, dass $(g_n, h_n + \lambda g) \in \bar{A}$. Da der Operator dissipativ ist, haben wir $\|\lambda g_n - h_n - \lambda g\| \geq \lambda \|g_n\|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Teilen wir durch λ und lassen $\lambda \rightarrow \infty$, erhalten wir $\|g_n - g\| \geq \|g_n\|$. Lassen wir $n \rightarrow \infty$, erhalten wir $g = 0$.

Sei $\lambda > 0$. Es ist klar, dass $\mathcal{R}(\lambda - A) \subset \mathcal{R}(\lambda - \bar{A}) \subset \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}$. Sei $\{(f_n, g_n)\} \subset \bar{A}$ mit $\lambda f_n - g_n \rightarrow h$ für ein $h \in L$. Wir haben $\lambda \|f_n - f_m\| \leq \|(\lambda f_n - g_n) - (\lambda f_m - g_m)\|$. Daher ist $\{f_n\}$ eine Cauchy-Folge, das heisst, $f_n \rightarrow f$ für ein $f \in L$. Da $g_n \rightarrow \lambda f - h$ und da $\bar{A}$ abgeschlossen ist, folgt, dass $f \in \mathcal{D}(\bar{A})$. Daher gibt es ein $g \in L$, so dass $(f, g) \in \bar{A}$ und $g_n \rightarrow g$. Weiter haben wir, dass $h = \lambda f - g \in \mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$, das heisst, $\mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$ ist abgeschlossen. Somit gilt $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A)} \subset \mathcal{R}(\lambda - \bar{A})$. $\square$

1.5. Halbgruppen auf Funktionenräumen

Sei $(M, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum und Γ eine Klasse von positiven Massen auf M . Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}$ den Vektorraum der $\mathcal{M}$ -messbaren Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\|f\| = \sup_{\mu \in \Gamma} \int |f| \, d\mu < \infty.$$

$\|\cdot\|$ ist eine Seminorm auf $\mathcal{L}$. In der Tat,

$$\int |f + g| \, d\mu \leq \int |f| + |g| \, d\mu \leq \|f\| + \|g\|,$$

und damit $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Dass $\|cf\| = |c|\|f\|$ folgt leicht. Sei $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L} : \|f\| = 0\}$ und L der Quotientenraum $\mathcal{L}/\mathcal{N}$. Dann kann man zeigen, dass L ein Banachraum ist (Übung). Ist zum Beispiel Γ der Raum der Wahrscheinlichkeitsmasse auf $\mathcal{M}$, dann ist L der Raum der beschränkten messbaren Funktionen.

Sei $(S, \mathcal{S}, \nu)$ ein σ -endlicher Massraum und $f : S \times M \rightarrow \mathbb{R}$ sei $\mathcal{S} \times \mathcal{M}$ -messbar. Falls es eine messbare Funktion $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $\|f(s, \cdot)\| \leq g(s)$ für alle $s \in S$ und $\int g(s) \nu(ds) < \infty$, dann gilt

$$\sup_{\mu \in \Gamma} \int \left| \int f(s, x) \nu(ds) \right| \mu(dx) \leq \sup_{\mu \in \Gamma} \iint |f(s, x)| \mu(dx) \nu(ds) \leq \int g(s) \nu(ds) < \infty$$

und $\int f(s, \cdot) \nu(ds)$ kann als die Äquivalenzklasse $h \in L$ definiert werden, für die

$$h(x) = \begin{cases} \int f(s, x) \nu(ds) & \text{if } \int |f(s, x)| \nu(ds) < \infty, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 1.31. Wir sagen, eine Funktion $u : S \rightarrow L$ ist **messbar**, falls es eine $\mathcal{S} \times \mathcal{M}$ -messbare Funktion v gibt, so dass $v(s, \cdot) \in u(s)$ für jedes $s \in S$. Eine Halbgruppe $\{T(t)\}$ ist **messbar**, falls $T(\cdot)f$ für jedes $f \in L$ messbar ist. Der **vollständige Generator** $\hat{A}$ einer messbaren Kontraktionshalbgruppe $\{T(t)\}$ auf L ist die Menge der Funktionen

$$\hat{A} = \{(f, g) \in L^2 : T(t)f - f = \int_0^t T(s)g \, ds \text{ für alle } t \geq 0\}.$$

Wir bemerken, dass $\hat{A}$ im Normalfall nicht einwertig ist.

1.6. Approximationssätze

In diesem Abschnitt arbeiten wir auf Banachräumen L und L_n für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Die Abbildungen $\pi_n : L \rightarrow L_n$ seien beschränkte lineare Transformationen. Es gelte $\sup_n \|\pi_n\| < \infty$. Wir schreiben $f_n \rightarrow f$, falls $f_n \in L_n$, $f \in L$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - \pi_n f\| = 0$.

Hilfssatz 1.32. Seien $\{T_n(t)\}$ und $\{S(t)\}$ stark stetige Kontraktionshalbgruppen auf L_n und L mit den Generatoren $\mathfrak{A}_n$ and $\mathfrak{A}$. Sei $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$. Nehmen wir an, dass $\pi_n S(t)f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}_n)$ für alle $t \geq 0$ und dass $\mathfrak{A}_n \pi_n S(\cdot)f : [0, \infty) \rightarrow L_n$ eine stetige Funktion ist. Dann gilt für jedes $t \geq 0$

$$T_n(t)\pi_n f - \pi_n S(t)f = \int_0^t T_n(t-s)(\mathfrak{A}_n \pi_n - \pi_n \mathfrak{A})S(s)f \, ds,$$

und damit

$$\|T_n(t)\pi_n f - \pi_n S(t)f\| \leq \int_0^t \|(\mathfrak{A}_n \pi_n - \pi_n \mathfrak{A})S(s)f\| \, ds.$$

Beweis. Wir haben in Proposition 1.9 gezeigt, dass $S(s)f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$, und somit ist die rechte Seite der Behauptung wohldefiniert. Es folgt nun aus Proposition 1.9, dass $-\frac{d}{ds}(T_n(t-s)\pi_n S(s)f) = T_n(t-s)(\mathfrak{A}_n \pi_n - \pi_n \mathfrak{A})S(s)f$ stetig in s ist. Die Behauptung folgt aus Hilfssatz 1.7. $\square$

Hilfssatz 1.33. Seien $\{T_n(t)\}$ und $\{T(t)\}$ stark stetige Kontraktionshalbgruppen auf L_n und L mit Generatoren $\mathfrak{A}_n$ and $\mathfrak{A}$. Sei D ein Kern für $\mathfrak{A}$. Nehmen wir weiter an, dass es für jedes $f \in D$ Funktionen $f_n \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}_n)$ gibt, so dass $f_n \rightarrow f$ und $\mathfrak{A}_n f \rightarrow \mathfrak{A}f$. Für $\lambda > 0$ sei A_n^λ die Yosida Approximation von $\mathfrak{A}_n$ und A^λ die Yosida Approximation von $\mathfrak{A}$. Dann konvergiert $A_n^\lambda \pi_n f \rightarrow A^\lambda f$ für jedes $f \in L$ und $\lambda > 0$.

Beweis. Sei $f \in D$ und $g = (\lambda - \mathfrak{A})f$. Dann gibt es Funktionen $f_n \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}_n)$, so dass $f_n \rightarrow f$ und $\mathfrak{A}_n f_n \rightarrow \mathfrak{A}f$. Also konvergiert $(\lambda - \mathfrak{A}_n)f_n \rightarrow g$. Mit Hilfe von (1.7) und der Dissipativität von $\mathfrak{A}_n$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \|A_n^\lambda \pi_n g - \pi_n A^\lambda g\| &= \|\lambda^2[(\lambda - \mathfrak{A}_n)^{-1} - \lambda^{-1}I]\pi_n g - \pi_n \lambda^2[(\lambda - \mathfrak{A})^{-1} - \lambda^{-1}I]g\| \\ &= \lambda^2 \|(\lambda - \mathfrak{A}_n)^{-1}\pi_n g - f_n + f_n - \pi_n(\lambda - \mathfrak{A})^{-1}g\| \\ &\leq \lambda^2 \|(\lambda - \mathfrak{A}_n)^{-1}[\pi_n g - (\lambda - \mathfrak{A}_n)f_n]\| + \lambda^2 \|f_n - \pi_n f\| \\ &\leq \lambda \|\pi_n g - (\lambda - \mathfrak{A}_n)f_n\| + \lambda^2 \|f_n - \pi_n f\|. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck konvergiert nach 0. Somit konvergiert $\|A_n^\lambda \pi_n g - \pi_n A^\lambda g\| \rightarrow 0$ für jedes $g \in \mathcal{R}(\lambda - \mathfrak{A}|_D)$. Aus Proposition 1.28 wissen wir, dass $\mathcal{R}(\lambda - \mathfrak{A}|_D)$ dicht in L ist. Da die linearen Transformationen $A_n^\lambda \pi_n - \pi_n A^\lambda$ gleichmässig beschränkt sind (beachte $\|A_n^\lambda\| \leq 2\lambda$ wegen (1.7)), folgt die Behauptung. $\square$

Satz 1.34. Seien $\{T_n(t)\}$ und $\{T(t)\}$ stark stetige Kontraktionshalbgruppen auf L_n und L mit Generatoren $\mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{A}$. Sei D ein Kern für $\mathfrak{A}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- i) Für jedes $f \in L$ gilt $T_n(t)\pi_n f \rightarrow T(t)f$ für alle $t \geq 0$, gleichmässig auf beschränkten Intervallen.
- ii) Für jedes $f \in L$ gilt $T_n(t)\pi_n f \rightarrow T(t)f$ für alle $t \geq 0$.
- iii) Für jedes $f \in D$ existieren $f_n \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}_n)$, so dass $f_n \rightarrow f$ und $\mathfrak{A}_n f_n \rightarrow \mathfrak{A}f$

Beweis. “i) $\Rightarrow$ ii)” Trivial.

“ii) $\Rightarrow$ iii)” Sei $\lambda > 0$, $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ und $g = (\lambda - \mathfrak{A})f$. Dann haben wir $f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)g \, dt$. Für jedes $n \geq 1$ definieren wir

$$f_n = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_n(t)\pi_n g \, dt = (\lambda - \mathfrak{A}_n)^{-1}\pi_n g,$$

siehe Proposition 1.12. Dann ist $f_n \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}_n)$. Mittels beschränkter Konvergenz folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t)\pi_n g \, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)g \, dt = (\lambda - \mathfrak{A})^{-1}g = f.$$

Weiter gilt $(\lambda - \mathfrak{A}_n)f_n = \pi_n g \rightarrow g = (\lambda - \mathfrak{A})f$. Somit konvergiert $\mathfrak{A}_n f_n \rightarrow \mathfrak{A}f$.

“iii) $\Rightarrow$ i)” Sei $\lambda > 0$. Wir bezeichnen mit $\{T_n^\lambda(t)\}$ und $\{T^\lambda(t)\}$ die stark stetigen Kontraktionshalbgruppen, die durch die Yosida Approximationen A_n^λ und A^λ (Hilfssatz 1.17) erzeugt werden. Sei $f \in D$. Wir wählen nun f_n wie in iii). Dann gilt

$$\begin{aligned} T_n(t)\pi_n f - \pi_n T(t)f &= T_n(t)(\pi_n f - f_n) + [(T_n(t) - T_n^\lambda(t))f_n] + T_n^\lambda(t)(f_n - \pi_n f) \\ &\quad + [T_n^\lambda(t)\pi_n f - \pi_n T^\lambda(t)f] + \pi_n [T^\lambda(t) - T(t)]f. \end{aligned}$$

Sei $t_0 > 0$. Wir bemerken, dass $\sup\{\|T_n(t)(\pi_n f - f_n)\| : 0 \leq t \leq t_0\} \leq \|\pi_n f - f_n\|$ und $\sup\{\|T_n^\lambda(t)(f_n - \pi_n f)\| : 0 \leq t \leq t_0\} \leq \|f_n - \pi_n f\|$ nach 0 konvergieren. Aus Proposition 1.22 folgt

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq t_0} \|(T_n(t) - T_n^\lambda(t))f_n\| &\leq t_0 \|(\mathfrak{A}_n - A_n^\lambda)f_n\| \\ &\leq t_0 (\|\mathfrak{A}_n f_n - \pi_n \mathfrak{A} f\| + \|\pi_n(\mathfrak{A} f - A^\lambda f)\| + \|\pi_n A^\lambda f - A_n^\lambda \pi_n f\| \\ &\quad + \|A_n^\lambda(\pi_n f - f_n)\|). \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 1.33 konvergiert dies nach $t_0 \|\pi_n(\mathfrak{A} f - A^\lambda f)\| \leq K t_0 \|\mathfrak{A} f - A^\lambda f\|$, wobei $K = \sup_n \|\pi_n\|$. Wir bemerken, dass $\|A_n^\lambda(t)\| \leq 2\lambda$ wegen (1.7), und daher ist $A_n^\lambda T^\lambda(t)f$ stetig in t . Aus Hilfssatz 1.32 folgt dann

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} \|T_n^\lambda(t)\pi_n f - \pi_n T^\lambda(t)f\| \leq \int_0^{t_0} \|(A_n^\lambda \pi_n - \pi_n A^\lambda)T^\lambda(s)f\| \, ds,$$

das nach Hilfssatz 1.33 auch nach 0 konvergiert. Schliesslich folgt aus Proposition 1.22

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} \|\pi_n(T^\lambda(t) - T(t))f\| \leq K t_0 \|A^\lambda f - \mathfrak{A} f\|.$$

Daher erhalten wir

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq t_0} \|T_n(t)\pi_n f - T(t)f\| \leq 2K t_0 \|A^\lambda f - \mathfrak{A} f\|.$$

Lassen wir $\lambda \rightarrow \infty$, so konvergiert die rechte Seite nach 0 wegen Hilfssatz 1.17. Somit gilt die Aussage für $f \in D$. Da D dicht ist in L , gilt die Aussage für alle $f \in L$. $\square$

Hilfssatz 1.35. Sei B eine lineare Kontraktion auf L . Dann gilt

$$\|B^n f - e^{n(B-I)} f\| \leq \sqrt{n} \|Bf - f\|$$

für alle $f \in L$ und $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $f \in L$ und $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|B^n f - B^k f\| \leq \|B^{|k-n|} f - f\| = \left\| \sum_{j=0}^{|k-n|-1} B^j (Bf - f) \right\| \leq |k-n| \|Bf - f\|.$$

Daher haben wir

$$\begin{aligned} \|B^n f - e^{n(B-I)} f\| &= \left\| B^n f - e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} B^k f \right\| = e^{-n} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} (B^n f - B^k f) \right\| \\ &\leq e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} |k-n| \frac{n^k}{k!} \|Bf - f\| \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k-n)^2 \frac{n^k}{k!} e^{-n} \right)^{1/2} \|Bf - f\| = \sqrt{n} \|Bf - f\|, \end{aligned}$$

wobei wir Jensens Ungleichung sowie Mittelwert und Varianz der Poisson Verteilung mit Parameter n verwendet haben. $\square$

Satz 1.36. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei T_n eine lineare Kontraktion auf L_n , ε_n eine echt positive Zahl und $A_n = \varepsilon_n^{-1}(T_n - I)$. Es gelte, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Sei weiter $\{T(t)\}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf L mit Generator $\mathfrak{A}$, und D ein Kern für $\mathfrak{A}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- i) Für jedes $f \in L$ gilt, dass $T_n^{\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor} \pi_n f \rightarrow T(t)f$ für alle $t \geq 0$, gleichmässig auf beschränkten Intervallen.
- ii) Für jedes $f \in L$ gilt, dass $T_n^{\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor} \pi_n f \rightarrow T(t)f$ für alle $t \geq 0$.
- iii) Für jedes $f \in D$ gibt es eine Folge $f_n \in L_n$, so dass $f_n \rightarrow f$ und $A_n f_n \rightarrow \mathfrak{A}f$ für $n \rightarrow \infty$.

Beweis. “i) $\Rightarrow$ ii)” Trivial.

“ii) $\Rightarrow$ iii)” Sei $\lambda > 0$, $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ und $g = (\lambda - \mathfrak{A})f$. Nach Proposition 1.12 gilt $f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)g \, dt$. Für jedes $n \geq 1$ definieren wir

$$f_n = \varepsilon_n \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k \varepsilon_n} T_n^k \pi_n g = \varepsilon_n \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k \varepsilon_n} T_n^{k \varepsilon_n / \varepsilon_n} \pi_n g.$$

Mittels beschränkter Konvergenz folgt nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda (k \varepsilon_n)} T_n^{(k \varepsilon_n) / \varepsilon_n} \pi_n g = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)g \, dt = f.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
(\lambda - A_n)f_n &= \lambda \varepsilon_n \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k \varepsilon_n} T_n^k \pi_n g - (T_n - I) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k \varepsilon_n} T_n^k \pi_n g \\
&= \pi_n g + \lambda \varepsilon_n \pi_n g + \lambda \varepsilon_n \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k \varepsilon_n} T_n^k \pi_n g + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k \varepsilon_n} T_n^k \pi_n g - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k \varepsilon_n} T_n^{k+1} \pi_n g \\
&= \pi_n g + \lambda \varepsilon_n \pi_n g + (\lambda \varepsilon_n e^{-\lambda \varepsilon_n} + e^{-\lambda \varepsilon_n} - 1) T_n \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k \varepsilon_n} T_n^k \pi_n g .
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck konvergiert nach $\pi_n g$, also nach $g = (\lambda - \mathfrak{A})f$. Daher konvergiert $A_n f_n \rightarrow \mathfrak{A}f$.

“iii) $\Rightarrow$ i)” Sei $f \in D$. Wir wählen die Folge $\{f_n\}$ wie in iii) vorgeschlagen. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
T_n^{\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor} \pi_n f - \pi_n T(t)f &= T_n^{\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor} (\pi_n f - f_n) + T_n^{\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor} f_n - e^{\varepsilon_n \lfloor t/\varepsilon_n \rfloor A_n} f_n \\
&\quad + e^{\varepsilon_n \lfloor t/\varepsilon_n \rfloor A_n} (f_n - \pi_n f) + e^{\varepsilon_n \lfloor t/\varepsilon_n \rfloor A_n} \pi_n f - \pi_n T(t)f .
\end{aligned}$$

Da T_n eine Kontraktion ist, konvergiert $T_n^{\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor} (\pi_n f - f_n)$ gleichmässig nach 0. Aus $e^{\varepsilon_n \lfloor t/\varepsilon_n \rfloor A_n} = e^{\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor (T_n - I)}$ und Hilfssatz 1.3 folgt, dass auch $e^{\varepsilon_n \lfloor t/\varepsilon_n \rfloor A_n} (f_n - \pi_n f)$ gleichmässig nach 0 konvergiert. Sei $t_0 > 0$. Nach Hilfssatz 1.35 haben wir

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq t_0} \left\| T_n^{\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor} f_n - e^{\varepsilon_n \lfloor t/\varepsilon_n \rfloor A_n} f_n \right\| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{t_0}{\varepsilon_n} \right] \right)^{1/2} \|\varepsilon_n A_n f_n\| = 0 .$$

Wir haben schon gesehen, dass $\{e^{tA_n}\}$ eine stark stetige Halbgruppe mit Generator A_n ist. Aus Hilfssatz 1.3 wissen wir weiter, dass es sich um eine Kontraktionshalbgruppe handelt. Nach Satz 1.34 gilt dann

$$e^{tA_n} \pi_n f \rightarrow T(t)f ,$$

gleichmässig auf beschränkten Intervallen. Dies zeigt, dass

$$e^{\varepsilon_n \lfloor t/\varepsilon_n \rfloor A_n} \pi_n f - \pi_n T(t)f$$

gleichmässig nach 0 konvergiert, da $T(t)f$ stetig in t ist. Damit ist die Aussage für $f \in D$ gezeigt. Da D dicht in L ist und T_n eine Kontraktion ist, folgt die Aussage für $f \in L$. $\square$

Korollar 1.37. Sei $\{V(t) : t \geq 0\}$ eine Familie von linearen Kontraktionen auf L mit $V(0) = I$. Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf L mit Generator $\mathfrak{A}$. Sei D ein Kern für $\mathfrak{A}$. Falls für jedes $f \in D$ gilt, dass $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1}(V(\varepsilon)f - f) = \mathfrak{A}f$, dann gilt für jedes $f \in L$, dass $(V(t/n))^n f \rightarrow T(t)f$ für jedes $t \geq 0$, gleichmässig auf beschränkten Intervallen.

Beweis. Wir setzen $T_n = V(t/n)$ und $\varepsilon_n = t/n$. Die Aussage folgt nun aus Satz 1.36 mit $f_n = f$. $\square$

Korollar 1.38. Let $\{T(t)\}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf L mit Generator $\mathfrak{A}$. Dann gilt für jedes $f \in L$, dass $(I - (t/n)\mathfrak{A})^{-n}f \rightarrow T(t)f$ für alle $t \geq 0$, gleichmässig auf beschränkten Intervallen. Alternativ, falls $\{\varepsilon_n\}$ eine Folge von echt positiven Zahlen ist, die gegen 0 konvergiert, dann gilt für jedes $f \in L$, dass $(I - \varepsilon_n\mathfrak{A})^{-\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor}f \rightarrow T(t)f$ für alle $t \geq 0$, gleichmässig auf beschränkten Intervallen.

Beweis. Sei $V(t) = (I - t\mathfrak{A})^{-1}$. Dies ist wegen Proposition 1.12 wohldefiniert. Wir bezeichnen mit A^λ die Yosida Approximation von $\mathfrak{A}$. Dann gilt $A^\lambda \rightarrow \mathfrak{A}$. Also haben wir

$$\varepsilon^{-1}(V(\varepsilon)f - f) = \varepsilon^{-2}(\varepsilon^{-1} - \mathfrak{A})^{-1}f - \varepsilon^{-1}f = A^{\varepsilon^{-1}}f.$$

Aus Lemma 1.17 folgt nun, dass die Voraussetzungen von Korollar 1.37 erfüllt sind. Dies beweist die erste Aussage. Die zweite Aussage folgt analog zum Beweis von Korollar 1.37 aus Satz 1.36. $\square$

2. Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmassen

In diesem Kapitel bezeichnet (S, d) einen metrischen Raum und $\mathcal{P}(S)$ bezeichnet die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmasse auf S bezüglich der Borel σ -Algebra $\mathfrak{B}(S)$.

2.1. Die Prohorov-Metrik

Definition 2.1. Die **Prohorov-Metrik** ρ auf $\mathcal{P}(S)$ ist definiert als

$$\rho(\mathbb{P}, Q) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mathbb{P}[F] \leq Q[F^\varepsilon] + \varepsilon \text{ für alle } F \in \mathcal{C}\},$$

wobei $\mathcal{C}$ die Klasse aller abgeschlossenen Mengen von S ist, und

$$F^\varepsilon = \{x \in S : \inf_{y \in F} d(x, y) < \varepsilon\}$$

ist die ε -Umgebung von F . Wir sagen eine Folge $\{\mathbb{P}_n\}$ konvergiert nach $\mathbb{P}$, falls $\rho(\mathbb{P}_n, \mathbb{P})$ nach 0 konvergiert.

Wir wollen zuerst zeigen, dass ρ wirklich eine Metrik ist. Dazu brauchen wir den folgenden

Hilfssatz 2.2. Seien $\mathbb{P}, Q \in \mathcal{P}(S)$ und $\alpha, \beta > 0$. Falls

$$\mathbb{P}[F] \leq Q[F^\alpha] + \beta$$

für alle $F \in \mathcal{C}$ gilt, dann gilt auch

$$Q[F] \leq \mathbb{P}[F^\alpha] + \beta$$

für alle $F \in \mathcal{C}$.

Beweis. Sei $F_1 \in \mathcal{C}$ und $F_2 = S \setminus F_1^\alpha$. Dann ist $F_2 \in \mathcal{C}$ und $F_1 \subset S \setminus F_2^\alpha$. Also gilt

$$\mathbb{P}[F_1^\alpha] = 1 - \mathbb{P}[F_2] \geq 1 - Q[F_2^\alpha] - \beta \geq Q[F_1] - \beta.$$

Dies zeigt die Aussage. □

Hilfssatz 2.3. *Die Prohorov-Metrik ist eine Metrik auf $\mathcal{P}(S)$.*

Beweis. Aus Hilfssatz 2.2 folgt sofort, dass $\rho(\mathbb{P}, Q) = \rho(Q, \mathbb{P})$. Ist $\rho(\mathbb{P}, Q) = 0$, so folgt aus der monotonen Konvergenz, dass $\mathbb{P}[F] \leq Q(F)$ für alle $F \in \mathcal{C}$. Da die abgeschlossenen Mengen alle Mengen in $\mathcal{B}(S)$ erzeugen, muss also $\mathbb{P}[F] \leq Q(F)$ für alle $F \in \mathcal{B}(S)$ gelten. Wegen der Symmetrie folgt dann $\mathbb{P}[F] = Q(F)$ für alle $F \in \mathcal{B}(S)$, also $\mathbb{P} = Q$. Seien nun $\mathbb{P}, Q, R \in \mathcal{P}(S)$. Nehmen wir an, dass $\rho(\mathbb{P}, Q) < \varepsilon$ und $\rho(Q, R) < \delta$. Dann ist für $F \in \mathcal{C}$

$$\mathbb{P}[F] \leq Q[F^\varepsilon] + \varepsilon \leq Q[\overline{F^\varepsilon}] + \varepsilon \leq R[\overline{F^{\varepsilon+\delta}}] + \delta + \varepsilon \leq R[F^{\varepsilon+\delta}] + \delta + \varepsilon .$$

Somit ist $\rho(\mathbb{P}, R) \leq \delta + \varepsilon$. Dies beweist die Dreiecksungleichung. $\square$

Hilfssatz 2.4. *Sei μ ein endliches Borelmaß auf S , $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und sei $p_i \geq 0$ und $A_i \in \mathcal{B}(S)$ für $i = 1, \dots, n$. Nehmen wir an, dass*

$$\sum_{i \in I} p_i \leq \mu \left[\bigcup_{i \in I} A_i \right] \quad (2.1)$$

für alle $I \subset \{1, \dots, n\}$. Dann gibt es Borelmasse $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ auf S , so dass $\lambda_i(A_i) = \lambda_i(S) = p_i$ für alle i und $\sum_{i=1}^n \lambda_i(A) \leq \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(S)$.

Beweis. Wir können annehmen, dass $p_i > 0$ für alle i . Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion.

Für $n = 1$ definieren wir $\lambda_1(A) = p_1 \mu(A \cap A_1) / \mu(A_1)$. Dann ist $\lambda_1(A_1) = \lambda_1(S) = p_1$, und, da $p_1 \leq \mu(A_1)$, $\lambda_1(A) = \lambda_1(A \cap A_1) \leq \mu(A \cap A_1) \leq \mu(A)$.

Nehmen wir nun an, die Aussage gilt für $n = 1, \dots, m-1$. Definieren wir η durch $\eta(A) = \mu(A \cap A_m) / \mu(A_m)$. Definieren wir

$$\varepsilon_0 = \sup \left\{ \varepsilon : \sum_{i \in I} p_i \leq (\mu - \varepsilon \eta) \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \text{ für alle } I \subset \{1, \dots, m-1\} \right\} .$$

Nehmen wir zuerst an, dass $\varepsilon_0 \geq p_m$. Setzen wir $\lambda_m = p_m \eta$ und $\mu' = \mu - \lambda_m$. Da $p_m \leq \mu(A_m)$ folgt, dass μ' ein Maß auf $\mathcal{B}(S)$ ist. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es Maße $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$, so dass $\lambda_i(A_i) = \lambda_i(S) = p_i$ und $\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i(A) \leq \mu'(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(S)$. Weiter gilt $\lambda_m(A_m) = \lambda_m(S) = p_m$. Durch die Konstruktion hat $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die benötigten Eigenschaften.

Nehmen wir nun $\varepsilon_0 < p_m$ an. Wir setzen dann $\mu' = \mu - \varepsilon_0 \eta$. Es gibt dann ein $\emptyset \neq I_0 \subset \{1, \dots, m-1\}$, so dass $\sum_{i \in I} p_i \leq \mu'(\cup_{i \in I} A_i)$ für alle $I \subset I_0$, wobei für $I = I_0$

die Gleichheit gilt. Insbesondere haben wir $I \neq \{1, \dots, m-1\}$. Es gibt dann Masse λ_i auf S für $i \in I_0$, so dass $\lambda_i(A_i) = \lambda_i(S) = p_i$ für $i \in I_0$ und $\sum_{i \in I_0} \lambda_i(A) \leq \mu'(A)$ für alle $A \in \mathfrak{B}(S)$. Sei $p'_i = p_i$ für $i \leq m-1$ und $p'_m = p_m - \varepsilon_0$. Wir setzen $B_0 = \cup_{i \in I_0} A_i$ und definieren $\mu''(A) = \mu'(A) - \mu'(A \cap B_0)$. Sei $I_1 = \{1, \dots, m\} \setminus I_0$. Sei $I \subset I_1$. Wir bemerken zuerst, dass falls $m \in I$,

$$\sum_{i \in I \cup I_0} p'_i \leq \mu\left(\bigcup_{i \in I \cup I_0} A_i\right) - \varepsilon_0 = \mu'\left(\bigcup_{i \in I \cup I_0} A_i\right). \quad (2.2)$$

Es gilt dann für beliebiges $I \subset I_1$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} p'_i + \mu'(B_0) &= \sum_{i \in I \cup I_0} p'_i \leq \mu'\left(\bigcup_{i \in I \cup I_0} A_i\right) \\ &= \mu'\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) + \mu'(B_0) - \mu'\left(\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B_0\right) = \mu''\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) + \mu'(B_0). \end{aligned}$$

Hier haben wir die Definition von I_0 verwendet, und die Ungleichung gilt wegen (2.2), falls $m \in I$ und der Definition von ε_0 , falls $m \notin I$. Also haben wir gezeigt, dass für jedes $I \subset I_1$

$$\sum_{i \in I} p'_i \leq \mu''\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right).$$

Wegen der Induktionsvoraussetzung gibt es Masse λ'_i auf S , so dass $\lambda'_i(A_i) = \lambda'_i(S) = p'_i$ für $i \in I_1$ und $\sum_{i \in I_1} \lambda'_i(A) \leq \mu''(A)$. Wir setzen nun $\lambda_i = \lambda'_i$ für $i \in I_1 \setminus \{m\}$ und $\lambda_m = \lambda'_m + \varepsilon_0 \eta$. Dann ist $\lambda_i(A_i) = \lambda_i(S) = p_i$ für $i \in I_1$. Weiter gilt für $A \in \mathfrak{B}(S)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \lambda_i(A) &= \sum_{i \in I_0} \lambda_i(A) + \sum_{i \in I_1} \lambda_i(A) = \sum_{i \in I_0} \lambda_i(A \cap B_0) + \sum_{i \in I_1} \lambda'_i(A) + \varepsilon_0 \eta(A) \\ &\leq \mu'(A \cap B_0) + \mu''(A) + \varepsilon_0 \eta(A) = \mu'(A) + \varepsilon_0 \eta(A) = \mu(A). \end{aligned}$$

Somit hat $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die geforderten Eigenschaften. □

Korollar 2.5. Sei μ ein endliches Borelmaß auf S , $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $p_i \geq 0$ und $A_i \in \mathfrak{B}(S)$ für $i = 1, \dots, n$. Sei $\varepsilon > 0$, und nehmen wir an, dass

$$\sum_{i \in I} p_i \leq \mu\left[\bigcup_{i \in I} A_i\right] + \varepsilon$$

für alle $I \subset \{1, \dots, n\}$. Dann gibt es Borelmasse $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ auf S , so dass $\lambda_i(A_i) = \lambda_i(S) \leq p_i$ für $i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i(S) \geq \sum_{i=1}^n p_i - \varepsilon$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i(A) \leq \mu(A)$ für alle $A \in \mathfrak{B}(S)$.

Beweis. Sei $S' = S \cup \{\Delta\}$, wobei Δ ein isolierter Punkt ist, der nicht zu S gehört. Wir erweitern das Mass μ auf S' , so dass $\mu(\{\Delta\}) = \varepsilon$. Wir setzen $A'_i = A_i \cup \{\Delta\}$. Dann gilt

$$\sum_{i \in I} p_i \leq \mu \left[\bigcup_{i \in I} A'_i \right]$$

für alle $I \subset \{1, \dots, n\}$. Nach Hilfssatz 2.4 gibt es Masse $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ auf S' , so dass $\lambda'_i(A'_i) = \lambda'_i(S') = p_i$ und $\sum_{i=1}^n \lambda'_i(A) \leq \mu(A)$ für alle $A \in \mathfrak{B}(S')$. Wir setzen nun $\lambda_i = \lambda'_i|_S$. Dann ist $\lambda_i(A_i) = \lambda'_i(A_i) \leq \lambda'_i(A'_i) = p_i$ und $\lambda_i(S \setminus A_i) = \lambda'_i(S \setminus A_i) = 0$. Also gilt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(S) = \sum_{i=1}^n \lambda'_i(S' \setminus \{\Delta\}) = \sum_{i=1}^n [p_i - \lambda'_i(\{\Delta\})] \geq \sum_{i=1}^n p_i - \mu(\{\Delta\}) = \sum_{i=1}^n p_i - \varepsilon ,$$

wobei wir $\sum_{i=1}^n \lambda'_i(\{\Delta\}) \leq \mu(\{\Delta\})$ verwendet haben. Schliesslich gilt $\sum_{i=1}^n \lambda_i(A) = \sum_{i=1}^n \lambda'_i(A) \leq \mu(A)$ für alle $A \in \mathfrak{B}(S)$. $\square$

Hilfssatz 2.6. Sei S separabel, $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}, Q \in \mathcal{P}(S)$, so dass $\rho(\mathbb{P}, Q) < \varepsilon$, und $\delta > 0$. Nehmen wir an, die Mengen $E_1, \dots, E_N \in \mathfrak{B}(S)$ sind disjunkt mit Durchmesser kleiner als δ und $\mathbb{P}[E_0] < \delta$, wobei $E_0 = S \setminus (\cup_{k=1}^N E_k)$. Dann gibt es Konstanten $c_1, \dots, c_N \in [0, 1]$ und unabhängige Zufallsvariablen $X, Y_0, \dots, Y_N$ (mit Werten in S) und ζ (mit Werten in $[0, 1]$), die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ definiert sind, so dass X die Verteilung $\mathbb{P}$ hat, ζ auf $[0, 1]$ gleichverteilt ist, und

$$Y = \begin{cases} Y_i, & \text{auf } \{X \in E_i, \zeta \geq c_i\}, i = 1, \dots, N, \\ Y_0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.3)$$

die Verteilung Q hat, und

$$\{d(X, Y) \geq \delta + \varepsilon\} \subset \{X \in E_0\} \cup \left\{ \zeta < \max \left\{ \frac{\varepsilon}{\mathbb{P}[E_i]} : \mathbb{P}[E_i] > 0 \right\} \right\} ,$$

und

$$\nu[d(X, Y) \geq \delta + \varepsilon] \leq \delta + \varepsilon .$$

Beweis. Sei $p_i = \mathbb{P}[E_i]$ und $A_i = E_i^\varepsilon$ für $i = 1, \dots, N$. Dann gilt

$$\sum_{i \in I} p_i \leq \mathbb{P} \left[\overline{\bigcup_{i \in I} E_i} \right] \leq Q \left[\bigcup_{i \in I} A_i \right] + \varepsilon$$

für alle $I \subset \{1, \dots, N\}$. Nach Korollar 2.5 gibt es dann Borelmasse $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ auf S , so dass $\lambda_i[A_i] = \lambda_i[S] \leq p_i$ für $i = 1, \dots, N$, $\sum_{i=1}^N \lambda_i[S] \geq \sum_{i=1}^N p_i - \varepsilon$ und

$\sum_{i=1}^N \lambda_i[A] \leq Q[A]$ für alle $A \in \mathfrak{B}(S)$. Insbesondere gilt $p_i - \lambda_i(S) \leq \varepsilon$. Wir setzen nun $c_i = (p_i - \lambda_i[S])/p_i \in [0, 1]$ mit der Interpretation $0/0 = 0$. Wir haben, $c_i \leq \varepsilon/p_i$ falls $p_i > 0$. Es gilt $(1 - c_i)\mathbb{P}[E_i] = \lambda_i(S)$ und

$$\mathbb{P}[E_0] + \sum_{i=1}^N c_i \mathbb{P}[E_i] = 1 - \sum_{i=1}^N \mathbb{P}[E_i] + \sum_{i=1}^N c_i \mathbb{P}[E_i] = 1 - \sum_{i=1}^N \lambda_i[S] .$$

Wir definieren nun die Masse

$$Q_i[B] = \frac{\lambda_i[B]}{(1 - c_i)\mathbb{P}[E_i]}$$

für $i = 1, \dots, N$ und

$$Q_0[B] = \frac{Q[B] - \sum_{i=1}^N \lambda_i[B]}{\mathbb{P}[E_0] + \sum_{i=1}^N c_i \mathbb{P}[E_i]} .$$

Wir definieren nun unabhängige Zufallsvariablen $X, Y_0, \dots, Y_N, \zeta$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ mit den Verteilungen $\mathbb{P}, Q_0, \dots, Q_N$ und uniform auf $[0, 1]$. Die Variablen $Y_1, \dots, Y_N$ nehmen dann Werte in $A_1, \dots, A_N$ an. Definieren wir nun Y durch (2.3). Dann haben wir für alle $B \in \mathfrak{B}(S)$

$$\begin{aligned} \nu[Y \in B] &= \sum_{i=1}^N Q_i(B)(1 - c_i)\mathbb{P}[E_i] + Q_0[B] \left(\mathbb{P}[E_0] + \sum_{i=1}^N c_i \mathbb{P}[E_i] \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i[B] + \left(Q[B] - \sum_{i=1}^N \lambda_i[B] \right) = Q[B] . \end{aligned}$$

Also hat Y die Verteilung Q . Es gilt nun $\{X \in E_i, \zeta \geq c_i\} \subset \{X \in E_i, Y \in A_i\} \subset \{d(X, Y) < \delta + \varepsilon\}$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \{d(X, Y) \geq \delta + \varepsilon\} &\subset \{X \in E_0\} \cup \bigcup_{i=1}^N \{X \in E_i, \zeta < c_i\} \subset \{X \in E_0\} \cup \left\{ \zeta < \bigvee_{i=1}^N c_i \right\} \\ &\subset \{X \in E_0\} \cup \left\{ \zeta < \max \left\{ \frac{\varepsilon}{\mathbb{P}[E_i]} : \mathbb{P}[E_i] > 0 \right\} \right\} . \end{aligned}$$

Die obige Formel ergibt auch

$$\nu[d(X, Y) \geq \delta + \varepsilon] \leq \mathbb{P}[E_0] + \sum_{i=1}^N c_i \mathbb{P}[E_i] = \mathbb{P}[E_0] + \sum_{i=1}^N (p_i - \lambda_i[S]) \leq \delta + \varepsilon ,$$

was die Aussage beweist. □

Satz 2.7. Sei (S, d) separabel und seien $\mathbb{P}, Q \in \mathcal{P}(S)$. Sei $\mathcal{M}(\mathbb{P}, Q)$ die Menge aller $\mu \in \mathcal{P}(S \times S)$ mit Randverteilungen $\mathbb{P}$ und Q . Dann gilt

$$\rho(\mathbb{P}, Q) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{P}, Q)} \inf\{\varepsilon > 0 : \mu[\{(x, y) : d(x, y) \geq \varepsilon\}] \leq \varepsilon\}.$$

Beweis. Aus $\mu[\{(x, y) : d(x, y) \geq \varepsilon\}] \leq \varepsilon$ für ein $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{P}, Q)$ folgt für $F \in \mathfrak{B}(S)$

$$\mathbb{P}[F] = \mu[F \times S] \leq \mu[(F \times S) \cap \{(x, y) : d(x, y) < \varepsilon\}] + \varepsilon \leq \mu[S \times F^\varepsilon] + \varepsilon = Q[F^\varepsilon] + \varepsilon.$$

Somit gilt $\rho(\mathbb{P}, Q) \leq \varepsilon$. Dies beweist die eine Ungleichung. Die andere Ungleichung folgt aus Hilfssatz 2.6. $\square$

Korollar 2.8. Sei (S, d) separabel. Seien $\{X_n\}$ und X Zufallsvariablen mit Werten in S die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ definiert sind mit Verteilungen $\mathbb{P}_n$ und $\mathbb{P}$. Gilt $d(X_n, X) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt $\mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}$.

Beweis. Sei μ_n die gemeinsame Verteilung von X_n und X . Dann konvergiert $\mu_n[\{(x, y) : d(x, y) \geq \varepsilon\}] \rightarrow 0$ für jedes $\varepsilon > 0$. Somit folgt das Resultat aus Satz 2.7. $\square$

Satz 2.9. Ist S separabel, dann ist auch $\mathcal{P}(S)$ separabel. Ist zusätzlich (S, d) vollständig, dann ist auch $(\mathcal{P}(S), \rho)$ vollständig.

Beweis. Sei $\{x_n\}$ eine dichte Teilmenge von S , und sei $\delta_x \in \mathcal{P}(S)$ das Dirac-Mass in x . Sei

$$\mathcal{M} = \left\{ \sum_{k=1}^N a_k \delta_{x_k} : N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a_k \in \mathbb{Q}_+, \sum_{k=1}^N a_k = 1 \right\}.$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass $\mathcal{M}$ dicht ist.

Sei nun $\{\mathbb{P}_n\} \subset \mathcal{P}(S)$ eine Folge mit $\rho(\mathbb{P}_{n-1}, \mathbb{P}_n) < 2^{-n}$ für $n \geq 2$. Wir wählen nun disjunkte Mengen $E_1^{(n)}, \dots, E_{N_n}^{(n)} \in \mathfrak{B}(S)$ mit Durchmesser kleiner als 2^{-n} , so dass $\mathbb{P}_{n-1}[E_0^{(n)}] < 2^{-n}$, wobei $E_0^{(n)} = S \setminus (\cup_{k=1}^{N_n} E_k^{(n)})$. Nach Hilfssatz 2.6 gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$, auf dem die unabhängigen Variablen $Y_0^{(n)}, \dots, Y_{N_n}^{(n)}$ (S -wertig) und $\zeta^{(n)}$ (gleichverteilt auf $[0, 1]$) sowie eine Variable X_1 mit Verteilung $\mathbb{P}_1$. Weiter gibt es Konstanten $c_1^{(n)}, \dots, c_{N_n}^{(n)} \in [0, 1]$, so dass für $n \geq 2$ die Zufallsvariablen

$$X_n = \begin{cases} Y_i^{(n)}, & \text{auf } \{X_{n-1} \in E_i^{(n)}, \zeta^{(n)} \geq c_i^{(n)}\}, i = 1, \dots, N_n, \\ Y_0^{(n)}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

die Verteilung $\mathbb{P}_n$ haben, und $\nu[d(X_{n-1}, X_n) \geq 2^{-n+1}] \leq 2^{-n+1}$. Aus dem Borel-Cantelli-Lemma folgern wir, dass

$$\nu \left[\sum_{n=2}^{\infty} d(X_{n-1}, X_n) < \infty \right] = 1 .$$

Da (S, d) vollständig ist, gibt es eine Variable X , so dass $X_n \rightarrow X$. Sei $\mathbb{P}$ die Verteilung von X . Es folgt nun aus Korollar 2.8, dass $\rho(\mathbb{P}_n, \mathbb{P})$ nach 0 konvergiert. Somit ist $(\mathcal{P}(S), \rho)$ vollständig. $\square$

Satz 2.10. *Sei (S, r) separabel und $\mathbb{P}_n$ und $\mathbb{P}$ seien aus $\mathcal{P}(S)$ mit $\rho(\mathbb{P}_n, \mathbb{P}) \rightarrow 0$. Dann gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ auf dem Variablen X_n und X mit den Verteilungen $\mathbb{P}_n$ und $\mathbb{P}$ definiert sind, und $X_n \rightarrow X$.*

Beweis. Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es disjunkte messbare Mengen $E_1^{(k)}, \dots, E_{N_k}^{(k)}$ mit Durchmesser kleiner als 2^{-k} und $\mathbb{P}[E_0^{(k)}] \leq 2^{-k}$, wobei $E_0^{(k)} = S \setminus (\bigcup_{i=1}^{N_k} E_i^{(k)})$. Wir dürfen annehmen, dass $\varepsilon_k = \min_{1 \leq i \leq N_k} \mathbb{P}[E_i^{(k)}] > 0$. Setzen wir $k_n = \max\{1\} \cup \{k \geq 1 : \rho(\mathbb{P}_n, \mathbb{P}) < \varepsilon_k/k\}$. Wir können annehmen, dass $k_n < \infty$, da wir für die anderen n einfach $X_n = X$ setzen können. Wir wenden nun Hilfssatz 2.6 an, wobei wir $Q = \mathbb{P}_n$, $\varepsilon = \varepsilon_{k_n}$ für $k_n > 1$ und $\varepsilon = \rho(\mathbb{P}_n, \mathbb{P}) + 1/n$ für $k_n = 1$, $\delta = 2^{-k_n}$, $E_i = E_i^{(k_n)}$ und $N = N_{k_n}$ wählen. Es gibt dann also einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ auf dem $Y_0^{(n)}, \dots, Y_{N_{k_n}}^{(n)}, \zeta$ gleichverteilt auf $[0, 1]$ und X mit Verteilung $\mathbb{P}$ existieren, die alle unabhängig sind, so dass es Konstanten $c_1^{(n)}, \dots, c_{N_{k_n}}^{(n)}$ in $[0, 1]$ gibt, so dass

$$X_n = \begin{cases} Y_i^{(n)}, & \text{auf } \{X \in E_i^{(k_n)}, \zeta \geq c_i^{(n)}\}, i = 1, \dots, N_{k_n}, \\ Y_0^{(n)}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

die Verteilung $\mathbb{P}_n$ hat, und, falls $k_n > 1$,

$$\{r(X_n, X) \geq 2^{-k_n} + \varepsilon_{k_n}/k_n\} \subset \{X \in E_0^{(k_n)}\} \cup \{\zeta < 1/k_n\} .$$

Setzen wir $K_n = \min_{m \geq n} k_m$. Ist $K_n > 1$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \nu \left[\bigcup_{m=n}^{\infty} \{r(X_m, X) \geq 2^{-k_m} + \varepsilon_{k_m}/k_m\} \right] &\leq \sum_{k=K_n}^{\infty} \nu[X \in E_0^{(k)}] + \nu[\zeta < 1/k_n] \\ &\leq 2^{-K_n} + \frac{1}{K_n} . \end{aligned}$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \infty$, folgt dass $X_n \rightarrow X$. $\square$

Korollar 2.11. (Continuous Mapping Theorem) Seien (S, r) und (S', r') separable metrische Räume und sei $h : S \rightarrow S'$ Borel-messbar. Seien $\mathbb{P}_n$ und $\mathbb{P}$ in $\mathcal{P}(S)$ so dass $\rho(\mathbb{P}_n, \mathbb{P}) \rightarrow 0$. Dann sind $Q_n = \mathbb{P}_n h^{-1}$ und $Q = \mathbb{P} h^{-1}$ in $\mathcal{P}(S')$. Sei $C_h \subset S$ die Menge der Punkte, in denen h stetig ist. Ist $\mathbb{P}[C_h] = 1$, dann gilt $\rho'(Q_n, Q) \rightarrow 0$, wobei ρ' die Prohorov Metrik auf $\mathcal{P}(S')$ ist.

Beweis. Nach Satz 2.10 gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem Variablen X_n und X definiert sind, so dass $X_n \rightarrow X$. Dann gilt auch $h(X_n) \rightarrow h(X)$. Nach Korollar 2.8 folgt daraus, dass $\rho'(Q_n, Q) \rightarrow 0$. $\square$

2.2. Der Satz von Prohorov

Definition 2.12. Ein Mass $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ heisst **straff**, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset S$ gibt, so dass $\mathbb{P}[K] \geq 1 - \varepsilon$. Eine Menge $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(S)$ heisst **straff**, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset S$ gibt, so dass $\mathbb{P}[K] \geq 1 - \varepsilon$ für alle $\mathbb{P} \in \mathcal{M}$.

Hilfssatz 2.13. Falls (S, r) vollständig und separabel ist, dann ist jedes $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ straff.

Beweis. Sei $\{x_k\}$ dicht in S und wählen wir $\varepsilon > 0$. Dann gibt es natürliche Zahlen N_n , so dass

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{k=1}^{N_n} B(x_k, 1/n)\right] \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Sei K der Abschluss von $\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k=1}^{N_n} B(x_k, 1/n)$. Dann ist K total beschränkt und abgeschlossen, und daher kompakt. Weiter gilt

$$\mathbb{P}[K] \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = 1 - \varepsilon.$$

$\square$

Satz 2.14. (Satz von Prohorov) Sei (S, r) vollständig und separabel, und $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(S)$. Dann sind folgende Aussage äquivalent:

i) $\mathcal{M}$ ist straff.

ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset S$, so dass

$$\inf_{P \in \mathcal{M}} \mathbb{P}[K^\varepsilon] \geq 1 - \varepsilon .$$

iii) $\mathcal{M}$ ist relativ kompakt.

Beweis. “i) $\Rightarrow$ ii)” Trivial.

“ii) $\Rightarrow$ iii)” Da $\overline{\mathcal{M}}$ vollständig ist (Satz 2.9), genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{M}$ total beschränkt ist. Sei $\varepsilon > 0$ und $0 < \delta < \varepsilon/2$. Wir wählen K , so dass $\inf_{P \in \mathcal{M}} \mathbb{P}[K^\delta] \geq 1 - \delta$. Es gibt dann eine endliche Menge $\{x_1, \dots, x_n\}$, so dass für $B_i = B(x_i, 2\delta)$ gilt, dass $K^\delta \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$. Dies ist der Fall, da K mit endlich vielen δ -Umgebungen überdeckt werden kann. Wir setzen $E_i = B_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j$. Sei $x_0 \in S$ und $m \geq n/\delta$. Sei

$$\mathcal{N} = \left\{ \sum_{i=0}^n \frac{k_i}{m} \delta_{x_i} : 0 \leq k_i \leq m, \sum_{i=0}^n k_i = m \right\} .$$

Sei $Q \in \mathcal{M}$. Wir setzen $k_i = \lfloor mQ[E_i] \rfloor$ und $k_0 = m - \sum_{i=1}^n k_i$. Da die Mengen $\{E_i\}$ disjunkt sind, gilt $k_0 \geq 0$. Mit $\mathbb{P} = \sum_{i=0}^n (k_i/m) \delta_{x_i} \in \mathcal{N}$ erhalten wir für eine abgeschlossene Menge F

$$Q[F] \leq Q\left[\bigcup_{F \cap E_i \neq \emptyset} E_i\right] + \delta \leq \sum_{F \cap E_i \neq \emptyset} \frac{\lfloor mQ[E_i] \rfloor}{m} + \frac{n}{m} + \delta \leq \mathbb{P}[F^{2\delta}] + 2\delta .$$

Somit ist $\rho(Q, \mathbb{P}) \leq 2\delta < \varepsilon$. Da $\mathcal{N}$ eine endliche Menge ist, ist $\mathcal{M}$ total beschränkt.

“iii) $\Rightarrow$ i)” Sei $\varepsilon > 0$. Da $\mathcal{M}$ total beschränkt ist, gibt es für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine endliche Menge $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}$, so dass $\mathcal{M} \subset \{Q : \inf_{\mathbb{P} \in \mathcal{M}_n} \rho(\mathbb{P}, Q) < \varepsilon 2^{-n-1}\}$. Aus Hilfssatz 2.13 schliessen wir, dass wir für jedes n eine kompakte Menge $K_n \subset S$ wählen können, so dass $\inf_{\mathbb{P} \in \mathcal{M}_n} \mathbb{P}[K_n] \geq 1 - \varepsilon 2^{-n-1}$. Für $Q \in \mathcal{M}$ gilt dann, dass es ein $\mathbb{P} \in \mathcal{M}_n$ gibt, so dass

$$Q[K_n^{\varepsilon 2^{-n-1}}] \geq \mathbb{P}[K_n] - \varepsilon 2^{-n-1} \geq 1 - \varepsilon 2^{-n} .$$

Wir setzen $K = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n^{\varepsilon 2^{-n-1}}}$. Dann ist K kompakt, da K abgeschlossen und total beschränkt ist. Wir haben für $Q \in \mathcal{M}$,

$$Q[K] \geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n} = 1 - \varepsilon .$$

Dies beweist die Behauptung. □

Proposition 2.15. Seien (S_k, r_k) metrische Räume und $S = \prod_{k=1}^{\infty} S_k$ sei der Raum mit der Metrik $r(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(r_k(x_k, y_k) \wedge 1)$. Sei $\{\mathbb{P}_\alpha\} \subset \mathcal{P}(S)$, und $\mathbb{P}_\alpha^k = \mathbb{P}_\alpha \pi_k^{-1} \in \mathcal{P}(S_k)$ sei die Randverteilung, wobei π_k die Koordinatenabbildung bezeichnet. Dann ist $\{\mathbb{P}_\alpha\}$ genau dann straff, wenn $\{\mathbb{P}_\alpha^k\}$ für jedes k straff ist.

Beweis. Sei $\{\mathbb{P}_\alpha^k\}$ für alle k straff und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine kompakte Menge $K_k \subset S_k$, so dass $\inf_\alpha \mathbb{P}_\alpha^k[K_k] \geq 1 - \varepsilon 2^{-k}$. Dann ist $K = \cap_{k=1}^{\infty} \pi_K^{-1}(K_k)$ kompakt in S , und

$$\mathbb{P}_\alpha[K] \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \mathbb{P}_\alpha^k[K_k]) \geq 1 - \varepsilon .$$

Also ist $\{\mathbb{P}_\alpha\}$ straff.

Sei nun $\{\mathbb{P}_\alpha\}$ straff. Ist $K \subset S$ kompakt, so ist $\pi_k(K)$ kompakt in S_k und $\mathbb{P}_\alpha^k[\pi_k(K)] \geq \mathbb{P}_\alpha[K]$. Somit ist $\{\mathbb{P}_\alpha^k\}$ für jedes k straff. $\square$

2.3. Schwache Konvergenz

Wir bezeichnen mit $\bar{C}(S)$ dem Raum der reellen beschränkten stetigen Funktionen auf einem metrischen Raum (S, r) . Auf $\bar{C}(S)$ verwenden wir die Supremumsnorm. Ist $F \in \mathfrak{B}(S)$, so ist $r(x, F) = \inf\{r(x, y) : y \in F\}$ der Abstand von x zu F .

Definition 2.16. Eine Folge $\{\mathbb{P}_n\} \subset \mathcal{P}(S)$ **konvergiert schwach** gegen ein Mass $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$, falls für jedes $f \in \bar{C}(S)$ der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f \, d\mathbb{P}_n = \int f \, d\mathbb{P}$ gilt. Wir schreiben $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$. Eine Folge von S -wertigen Zufallsvariablen $\{X_n\}$ **konvergiert schwach** gegen X , falls die entsprechenden Masse konvergieren. Wir schreiben $X_n \Rightarrow X$.

Eine Menge A heisst $\mathbb{P}$ -stetig, falls $\mathbb{P}[\partial A] = 0$.

Satz 2.17. Sei (S, r) ein metrischer Raum und $\{\mathbb{P}_n\} \subset \mathcal{P}(S)$ und $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$. Dann impliziert

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\mathbb{P}_n, \mathbb{P}) = 0$$

die folgenden äquivalenten Bedingungen:

$$\text{ii) } \mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P} ,$$

- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f \, d\mathbb{P}_n = \int f \, d\mathbb{P}$ für alle gleichmässig stetigen $f \in \bar{C}(S)$,
- iv) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n[F] \leq \mathbb{P}[F]$ für alle abgeschlossenen Mengen $F \subset S$,
- v) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n[G] \geq \mathbb{P}[G]$ für alle offenen Mengen $G \subset S$,
- vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n[A] = \mathbb{P}[A]$ für alle $\mathbb{P}$ -stetigen Mengen $A \subset S$.

Ist S separabel, dann sind alle Bedingungen i)–vi) äquivalent.

Beweis. “i) $\Rightarrow$ ii)” Wir setzen $\varepsilon_n = \rho(\mathbb{P}_n, \mathbb{P}) + 1/n$. Sei $f \in \bar{C}(S)$ mit $f \geq 0$. Dann gilt

$$\int f \, d\mathbb{P}_n = \int_0^{\|f\|} \mathbb{P}_n[f \geq t] \, dt \leq \int_0^{\|f\|} \mathbb{P}[\{f \geq t\}^{\varepsilon_n}] \, dt + \varepsilon_n \|f\|.$$

Somit gilt

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int f \, d\mathbb{P}_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\|f\|} \mathbb{P}[\{f \geq t\}^{\varepsilon_n}] \, dt = \int_0^{\|f\|} \mathbb{P}[f \geq t] \, dt = \int f \, d\mathbb{P}.$$

Insbesondere haben wir gezeigt, dass für jedes $f \in \bar{C}(S)$

$$\|f\| + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int f \, d\mathbb{P}_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int (\|f\| + f) \, d\mathbb{P}_n \leq \int (\|f\| + f) \, d\mathbb{P} = \|f\| + \int f \, d\mathbb{P}$$

und

$$\|f\| - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int f \, d\mathbb{P}_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int (\|f\| - f) \, d\mathbb{P}_n \leq \int (\|f\| - f) \, d\mathbb{P} = \|f\| - \int f \, d\mathbb{P}.$$

Dies beweist die Behauptung.

“ii) $\Rightarrow$ iii)” Trivial.

“iii) $\Rightarrow$ iv)” Sei F abgeschlossen und $\varepsilon > 0$. Wir betrachten die Funktion $f_\varepsilon(x) = (1 - \varepsilon^{-1}r(x, F))^+$. Dann gilt $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n[F] \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int f_\varepsilon \, d\mathbb{P}_n \leq \mathbb{P}[F^\varepsilon]$. Lassen wir $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt die Behauptung.

“iv) $\Leftrightarrow$ v)” Trivial.

“iv) und v) $\Rightarrow$ vi)” Wir erhalten

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n[A] \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n[\bar{A}] \leq \mathbb{P}[\bar{A}] = \mathbb{P}[A]$$

und

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n[A] \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n[\mathring{A}] \geq \mathbb{P}[\mathring{A}] = \mathbb{P}[A].$$

“vi) $\Rightarrow$ ii)” Sei $f \in \bar{C}(S)$ und $f \geq 0$. Dann ist $\partial\{f \geq t\} \subset \{f = t\}$. Somit gibt es höchstens abzählbar viele t für die $\{f \geq t\}$ keine $\mathbb{P}$ -stetige Menge ist. Aus der beschränkten Konvergenz erhalten wir dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f \mathbb{P}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\|f\|} \mathbb{P}_n[f \geq t] dt = \int_0^{\|f\|} \mathbb{P}[f \geq t] dt = \int f d\mathbb{P}.$$

Die Aussage folgt nun aus $f = f^+ - f^-$.

“v) $\Rightarrow$ i)” Sei S separabel. Sei $0 < \varepsilon < 2$ und $E_1, E_2, \dots \in \mathfrak{B}(S)$ eine Partition von S , so dass der Durchmesser von E_i echt kleiner als $\varepsilon/2$ ist. Sei $N = \inf\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^n E_i] > 1 - \varepsilon/2\}$. Seien $\mathcal{G}$ die Mengen der Form $(\bigcup_{i \in I} E_i)^{\varepsilon/2}$ mit $I \subset \{1, \dots, N\}$. Es gibt dann also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\mathbb{P}[G] < \mathbb{P}_n[G] + \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_0$ und $G \in \mathcal{G}$. Für $F \in \mathcal{C}$ sei $F_0 = \bigcup\{E_i : i \leq N, E_i \cap F \neq \emptyset\}$. Dann ist $F_0^{\varepsilon/2} \in \mathcal{G}$ und

$$\mathbb{P}[F] \leq \mathbb{P}[F_0^{\varepsilon/2}] + \varepsilon/2 \leq \mathbb{P}_n[F_0^{\varepsilon/2}] + \varepsilon \leq \mathbb{P}_n[F^\varepsilon] + \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Also ist $\rho(\mathbb{P}_n, \mathbb{P}) \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. $\square$

Korollar 2.18. Sei $\{\mathbb{P}_n\} \subset \mathcal{P}(S)$ und $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S)$ und $S' \in \mathfrak{B}(S)$. Nehmen wir an, dass $\mathbb{P}_n[S'] = \mathbb{P}[S'] = 1$. Wir bezeichnen mit $\mathbb{P}'_n$ beziehungsweise $\mathbb{P}'$ die Einschränkungen auf $\mathfrak{B}(S')$. Dann gilt $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$ genau dann, wenn $\mathbb{P}'_n \Rightarrow \mathbb{P}'$.

Beweis. Nehmen wir $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$ an. Sei $G' \subset S'$ offen in S' . Dann existiert $G \subset S$ offen in S , so dass $G' = G \cap S'$. Also gilt

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}'_n[G'] = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n[G \cap S'] = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n[G] \geq \mathbb{P}[G] = \mathbb{P}[G'] = \mathbb{P}'[G'].$$

Also gilt $\mathbb{P}'_n \Rightarrow \mathbb{P}'$. Nehmen wir $\mathbb{P}'_n \Rightarrow \mathbb{P}'$ an. Sei G offen in S . Dann ist $G' = G \cap S'$ offen in S' . Also haben wir

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n[G] = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n[G'] = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}'_n[G'] \geq \mathbb{P}'[G'] = \mathbb{P}[G'] = \mathbb{P}[G].$$

Also gilt auch $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$. $\square$

2.4. Trennende Mengen

Proposition 2.19. *Ist S separabel, so gibt es eine Folge $\{f_n\} \subset \bar{C}(S)$ mit $f_n \geq 0$, so dass jede Funktion aus $B(S)$ erhalten werden kann als punktweiser Grenzwert einer beschränkten Folge von Funktionen aus dem Raum der Funktionen, die von $\{f_n\}$ aufgespannt wird.*

Beweis. Sei $\{x_i\} \subset S$ dicht in S . Für jede offene Menge $G \subset S$, die als endlicher Durchschnitt von Kugeln $B(x_i, 1/k)$ geschrieben werden kann, wählen wir eine beschränkte Folge von Funktionen $\{f_n^G\} \subset \bar{C}(S)$, so dass f_n^G punktweise nach $\mathbb{1}_G$ konvergiert. Die Klasse der Mengen B , für die $\mathbb{1}_B$ als punktweiser Grenzwert erhalten werden kann, bildet eine Dynkin Klasse. Daraus folgt die Aussage. $\square$

Definition 2.20. *Eine Menge $M \subset \bar{C}(S)$ heisst **trennend**, falls es für zwei Masse $\mathbb{P}, Q \in \mathcal{P}(S)$ mit $\mathbb{P} \neq Q$ eine Funktion $f \in M$ gibt, so dass $\int f \, d\mathbb{P} \neq \int f \, dQ$.*

*M heisst **punkttrennend**, falls es für jedes $x, y \in S$ mit $x \neq y$ eine Funktion $f \in M$ gibt, so dass $f(x) \neq f(y)$.*

Proposition 2.21. *Seien (S_k, r_k) separable metrische Räume, $S = \prod_{k=1}^{\infty} S_k$ der Produktraum mit der Produktmetrik $r(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(d_k(x_k, y_k) \wedge 1)$. Für $M_k \subset \bar{C}(S_k)$ definieren wir*

$$M = \left\{ \prod_{k=1}^n f_k(x_k) : n \geq 1, f_k \in M_k \cup \{1\} \right\}.$$

Ist M_k trennend für alle k , so ist M trennend.

Beweis. Seien $\mathbb{P}$ und Q zwei Masse auf S . Nehmen wir an, dass

$$\int f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \, d\mathbb{P}(x) = \int f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \, dQ(x)$$

für alle $n \geq 1$ und $f_i \in M_i \cup \{1\}$. Wir definieren die signierten Masse

$$d\mu(x) = f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) \, d\mathbb{P}(x), \quad d\nu(x) = f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) \, dQ(x).$$

Seien μ^1 und ν^1 die Randverteilungen von μ und ν auf S_1 . Dann ist $\int f_1(x) \, d\mu^1(x) = \int f_1(x) \, d\nu^1(x)$. Da M_1 trennend ist, gilt dies auch für die endlichen signierten Masse. Also ist $\mu^1 = \nu^1$. Insbesondere gilt

$$\int \mathbb{1}_{A_1}(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) \, d\mathbb{P}(x) = \int \mathbb{1}_{A_1}(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) \, dQ(x)$$

für alle $A_1 \in \mathcal{B}(S_1)$. Gehen wir analog weiter, erhalten wir

$$\int \mathbb{1}_{A_1}(x_1) \cdots \mathbb{1}_{A_n}(x_n) \, d\mathbb{P}(x) = \int \mathbb{1}_{A_1}(x_1) \cdots \mathbb{1}_{A_n}(x_n) \, dQ(x).$$

Da $\mathcal{B}(S)$ von den Mengen der Form $A_1 \times \cdots \times A_n$ erzeugt wird, gilt $\mathbb{P} = Q$. $\square$

2.5. Der Raum $D_S[0, \infty)$

Definition 2.22. Der Raum der cadlag Funktionen $[0, \infty) \rightarrow S$ wird mit $D_S[0, \infty)$ bezeichnet. Sei Λ' die Menge aller stetigen und strikt wachsenden Funktionen $\lambda : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $\lambda(0) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \infty$. Mit Λ bezeichnen wir die Menge aller $\lambda \in \Lambda'$, so dass

$$\gamma(\lambda) = \sup_{0 \leq t < s} \left| \log \frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t} \right| < \infty .$$

Wir definieren den Abstand

$$d(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \gamma(\lambda) \vee \int_0^\infty e^{-u} d(x, y, \lambda, u) \, du \right\}$$

für $x, y \in D_S[0, \infty)$, wobei $d(x, y, \lambda, u) = \sup_{t \geq 0} r(x(t \wedge u), y(\lambda(t) \wedge u)) \wedge 1$.

Hilfssatz 2.23. Ist $x \in D_S[0, \infty)$, so sind die Unstetigkeitsstellen von x abzählbar.

Beweis. Sei $A_n = \{t > 0 : r(x(t), x(t-)) > n^{-1}\}$. Die Menge A_n kann keine Häufungspunkte enthalten, da x cadlag ist. Also ist A_n abzählbar. Damit ist auch die Menge der Unstetigkeiten $\cup_n A_n$ abzählbar. $\square$

Hilfssatz 2.24. d ist eine Metrik für $D_S[0, \infty)$.

Beweis. Bezeichnen wir mit $\lambda^{-1}(s) = \inf\{t : \lambda(t) \geq s\}$ die Umkehrfunktion von λ . Wir bemerken, dass $\gamma(\lambda) = \gamma(\lambda^{-1})$. Es gilt dann $\sup_{t \geq 0} r(x(t \wedge u), y(\lambda(t) \wedge u)) = \sup_{t \geq 0} r(x(\lambda^{-1}(t) \wedge u), y(t \wedge u))$ und somit $d(x, y, \lambda, u) = d(y, x, \lambda^{-1}, u)$. Also haben wir $d(x, y) = d(y, x)$.

Sei $d(x, y) = 0$. Dann gibt es eine Folge $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$, so dass $\gamma(\lambda_n) \rightarrow 0$ und $\int_0^\infty e^{-u} d(x, y, \lambda_n, u) \, du \rightarrow 0$. Sei $\lambda \in \Lambda$. Falls $\lambda(t) < t$, so ist

$$\frac{t - \lambda(t)}{t} = 1 - e^{-|\log(\lambda(t)/t)|} \leq 1 - e^{-\gamma(\lambda)} \leq \gamma(\lambda) . \quad (2.4a)$$

Ist $\lambda(t) > t$, so folgt

$$\frac{\lambda(t) - t}{t} = \frac{\lambda(t) - \lambda(\lambda^{-1}(t))}{t - \lambda^{-1}(t)} \frac{t - \lambda^{-1}(t)}{t} \leq e^{\gamma(\lambda)} \gamma(\lambda) . \quad (2.4b)$$

Insbesondere haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |\lambda_n(t) - t| = 0 \quad (2.5)$$

für alle $T > 0$. Ist also t ein Punkt, an dem $y(t)$ stetig ist, so muss $x(t) = y(t)$ gelten, da $d(x, y, \lambda_n, u)$ für fast alle u gegen 0 konvergiert. Da y cadlag ist, ist y fast überall stetig (Hilfssatz 2.23). Da auch x rechtsstetig ist, muss $x = y$ gelten.

Seien $x, y, z \in D_S[0, \infty)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ und $u \geq 0$. Wir haben dann wegen der Dreiecksungleichung

$$r(x(t \wedge u), z(\lambda_2(\lambda_1(t)) \wedge u)) \leq r(x(t \wedge u), y(\lambda_1(t) \wedge u)) + r(y(\lambda_1(t) \wedge u), z(\lambda_2(\lambda_1(t)) \wedge u)) .$$

Diese Ungleichung gilt auch für r ersetzt durch $r \wedge 1$. Da $\lambda_1(t)$ alle positiven Zahlen durchläuft, erhalten wir

$$d(x, z, \lambda_2 \circ \lambda_1, u) \leq d(x, y, \lambda_1, u) + d(y, z, \lambda_2, u) .$$

Im weiteren erhalten wir für $s > t \geq 0$

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{\lambda_2(\lambda_1(s)) - \lambda_2(\lambda_1(t))}{s - t} \right| &= \left| \log \frac{\lambda_2(\lambda_1(s)) - \lambda_2(\lambda_1(t))}{\lambda_1(s) - \lambda_1(t)} + \log \frac{\lambda_1(s) - \lambda_1(t)}{s - t} \right| \\ &\leq \gamma(\lambda_2) + \gamma(\lambda_1) . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Also gilt $\gamma(\lambda_2 \circ \lambda_1) \leq \gamma(\lambda_1) + \gamma(\lambda_2)$. Setzen wir diese Ungleichungen zusammen, ergibt sich die Dreiecksungleichung $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. $\square$

Proposition 2.25. Sei $\{x_n\} \subset D_S[0, \infty)$ und $x \in D_S[0, \infty)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$.
- ii) Es gibt $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(\lambda_n) = 0$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} r(x_n(t), x(\lambda_n(t))) = 0 \quad (2.7)$$

für alle $T > 0$.

- iii) Für jedes $T > 0$ gibt es eine Folge $\{\lambda_n\} \subset \Lambda'$ (kann von T abhängen), so dass (2.5) und (2.7) gilt.

Beweis. “i) $\Rightarrow$ ii)” Es gibt $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ und $\{u_n\} \subset (0, \infty)$, so dass $\gamma(\lambda_n) \rightarrow 0$, $u_n \rightarrow \infty$ und $d(x_n, y_n, \lambda_n, u_n) \rightarrow 0$. Insbesondere gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} r(x_n(t \wedge u_n), x(\lambda_n(t) \wedge u_n)) = 0 .$$

Da $\lambda_n(T) \leq T + \gamma(\lambda_n)e^{\gamma(\lambda_n)T}$, siehe (2.4), ist für n gross genug, $u_n \geq \max\{T, \lambda_n(T)\}$. Somit gilt die Aussage.

“ii) $\Rightarrow$ i)” Es folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} r(x_n(t \wedge u), x(\lambda_n(t) \wedge u)) = 0$$

für jedes $u > 0$. Da $\int_u^\infty e^{-s} d(x_n, x, \lambda_n, s) ds \leq e^{-u}$, folgt die Aussage.

“ii) $\Rightarrow$ iii)” Trivial, da (2.5) für alle $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ gilt, für die $\gamma(\lambda_n) \rightarrow 0$.

“iii) $\Rightarrow$ ii)” Sei $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wir wählen $\{\lambda_n^N\} \subset \Lambda'$, so dass die Bedingungen für $T = N$ erfüllt sind, und so dass für jedes n , $\lambda_n^N(t) = \lambda_n^N(N) + t - N$ für $t \geq N$. Definieren wir $\tau_0^N = 0$ und

$$\tau_k^N = \inf\{t > \tau_{k-1}^N : r(x(t), x(\tau_{k-1}^N)) > N^{-1}\}, \quad (2.8)$$

mit der Interpretation dass $\tau_k^N = \infty$, falls $\tau_{k-1}^N = \infty$. Da x Grenzwerte von links hat, gibt es keine Häufungspunkte von $\{\tau_k^N : k \geq 0\}$. Wir setzen $u_{k,n}^N = (\lambda_n^N)^{-1}(\tau_k^N)$ mit $(\lambda_n^N)^{-1}(\infty) = \infty$ und definieren

$$\mu_n^N(t) = \tau_k^N + \frac{t - u_{k,n}^N}{u_{k+1,n}^N - u_{k,n}^N} (\tau_{k+1}^N - \tau_k^N)$$

für $t \in [u_{k,n}^N, u_{k+1,n}^N) \cap [0, N]$, mit der Interpretation $\infty/\infty = 1$, und $\mu_n^N(t) = \mu_n^N(N) + t - N$ für $t > N$. Dann ist $\mu_n^N \in \Lambda$ mit

$$\gamma(\mu_n^N) = \max\{|\log(\tau_{k+1}^N - \tau_k^N) - \log(u_{k+1,n}^N - u_{k,n}^N)| : u_{k,n}^N < N\}.$$

Es gilt nun für alle n

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq N} r(x_n(t), x(\mu_n^N(t))) &\leq \sup_{0 \leq t \leq N} r(x_n(t), x(\lambda_n^N(t))) + \sup_{0 \leq t \leq N} r(x(\lambda_n^N(t)), x(\mu_n^N(t))) \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq N} r(x_n(t), x(\lambda_n^N(t))) + \frac{2}{N}. \end{aligned}$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n}^N = \tau_k^N$ konvergiert $\gamma(\mu_n^N)$ nach 0. Also können wir eine Folge $1 < n_1 < n_2 < \dots$ wählen, so dass $\gamma(\mu_n^N) \leq N^{-1}$ und $\sup_{0 \leq t \leq N} r(x_n(t), x(\mu_n^N(t))) \leq 3N^{-1}$ für alle $n \geq n_N$. Für $1 \leq n < n_1$ wählen wir $\hat{\lambda}_n \in \Lambda$ beliebig. Für $n_N \leq n < n_{N+1}$ wählen wir $\hat{\lambda}_n = \mu_n^N$. Dann ist $\{\hat{\lambda}_n\} \in \Lambda$ und erfüllt die Bedingungen. $\square$

Satz 2.26. *Ist S separabel, dann ist $D_S[0, \infty)$ separabel. Ist (S, r) vollständig, dann ist auch $(D_S[0, \infty), d)$ vollständig.*

Beweis. Da $r \wedge 1$ die gleich Topologie erzeugt, und die Vollständigkeit nicht verändert wird, können wir annehmen, dass $r \leq 1$. Wir nehmen an, dass S separabel ist. Sei $\{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\} \subset S$ eine abzählbare dichte Menge. Sei Γ die Klasse von Funktionen der Form $X(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_{i_k} \mathbb{1}_{t_{k-1} \leq t < t_k} + \alpha_{i_{n+1}} \mathbb{1}_{t \geq t_n}$, wobei $n \geq 1$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ rationale Zahlen sind und $i_n \in \mathbb{N}$. Dann ist Γ abzählbar. Es ist nicht schwer zu sehen, dass Γ dicht ist in $D_S[0, \infty)$.

Sei nun (S, r) vollständig und $\{x_n\} \subset D_S[0, \infty)$ eine Cauchyfolge. Es gibt Zahlen $1 \leq N_1 < N_2 < \dots$, so dass für $n, m \geq N_k$ die Ungleichung $d(x_n, x_m) \leq 2^{-k-1}e^{-k}$ gilt. Wir setzen dann $y_k = x_{N_k}$. Wir wählen $u_k > k$ und $\lambda_k \in \Lambda$, so dass $\gamma(\lambda_k) \leq 2^{-k}$ und $d(y_k, y_{k+1}, \lambda_k, u_k) \leq 2^{-k}$. Aus (2.6) folgt, dass $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \gamma(\lambda_{k+n} \circ \dots \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k) < \infty$. Insbesondere ist die Folge $\lambda_{k+n} \circ \dots \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k$ beschränkt, und hat daher auf jedem beschränkten Intervall eine konvergente Teilfolge. Aus (2.4) folgt nun aber, dass $\mu_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k+n} \circ \dots \circ \lambda_{k+1} \circ \lambda_k$ gleichmässig auf beschränkten Intervallen existiert, Lipschitz-stetig ist, und $\gamma(\mu_k) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \gamma(\lambda_i) \leq 2^{-k+1}$. Also ist $\mu_k \in \Lambda$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq 0} r(y_k(\mu_k^{-1}(t) \wedge u_k), y_{k+1}(\mu_{k+1}^{-1}(t) \wedge u_k)) \\ &= \sup_{t \geq 0} r(y_k(\mu_k^{-1}(t) \wedge u_k), y_{k+1}(\lambda_k(\mu_k^{-1}(t)) \wedge u_k)) \\ &= \sup_{t \geq 0} r(y_k(t \wedge u_k), y_{k+1}(\lambda_k(t) \wedge u_k)) \leq 2^{-k}. \end{aligned}$$

Als der Vollständigkeit von (S, r) folgt also, dass $y_k \circ \mu_k^{-1}$ gegen eine Funktion $y : [0, \infty) \rightarrow S$ konvergiert, und zwar gleichmässig auf beschränkten Intervallen. Dann muss aber $y \in D_S[0, \infty)$ gelten. Wir haben nun $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(\mu_k^{-1}) = 0$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} r(y_k(\mu_k^{-1}(t)), y(t)) = 0$ für alle $T > 0$. Also folgt aus Proposition 2.25, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Da $\{x_k\}$ eine Cauchyfolge ist, folgt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$. $\square$

2.6. Die kompakten Mengen von $D_S[0, \infty)$

Betrachten wir eine Elementarfunktion $x \in D_S[0, \infty)$ setzen wir $s_0(x) = 0$ und $s_k(x) = \inf\{t > s_{k-1}(x) : x(t) \neq x(t-)\}$.

Hilfssatz 2.27. Sei $\Gamma \subset S$ kompakt und $\delta > 0$. Wir definieren die Menge der Elementarfunktionen $A(\Gamma, \delta)$ mit der Eigenschaft, dass $x(t) \in \Gamma$ für alle $t \geq 0$ und $s_k(x) - s_{k-1}(x) > \delta$ falls $s_{k-1} \neq \infty$. Dann ist der Abschluss von $A(\Gamma, \delta)$ kompakt.

Beweis. Sei $\{x_n\} \subset A(\Gamma, \delta)$. Durch ein Diagonalisierungsargument gibt es eine Teilfolge $\{y_m\}$, so dass entweder $s_k(y_m) < \infty$ für jedes m und $\lim_{m \rightarrow \infty} s_k(y_m) = t_k \in [0, \infty]$ existiert und $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(s_k(y_m)) = \alpha_k$ existiert, oder $s_k(y_m) = \infty$ für alle m . Da $s_k(y_m) - s_{k-1}(y_m) > \delta$ folgt nun, dass y_m gegen eine Elementarfunktion $y \in D_S[0, \infty)$ konvergiert, mit $y(t) = \alpha_k$ für $t_k \leq t < t_{k+1}$. Also hat $\{x_n\}$ eine konvergente Teilfolge und somit ist die Aussage bewiesen. $\square$

Wir definieren für $x \in D_S[0, \infty)$, $\delta > 0$ und $T > 0$ die Grösse

$$w'(x, \delta, T) = \inf_{\{t_i\}} \max_i \sup_{r, s \in [t_{i-1}, t_i]} r(x(s), x(t)) ,$$

wobei $\{t_i\}$ über alle $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < T \leq t_n$ mit $\min_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) > \delta$ und $n \geq 1$. Man beachte, dass $w'(x, \delta, T)$ wachsend ist in δ und T . Man hat ferner

$$w'(x, \delta, T) \leq w'(y, \delta, T) + 2 \sup_{0 \leq s < T + \delta} r(x(s), y(s)) . \quad (2.9)$$

Hilfssatz 2.28.

- i) Für jedes $x \in D_S[0, \infty)$ und $T > 0$ ist die Funktion $w'(x, \delta, T)$ rechtsstetig in δ und $\lim_{\delta \downarrow 0} w'(x, \delta, T) = 0$.
- ii) Gilt für eine Folge $\{x_n\} \subset D_S[0, \infty)$ und eine Funktion $x \in D_S[0, \infty)$ der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$, so haben wir

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} w'(x_n, \delta, T) \leq w'(x, \delta, T + \varepsilon)$$

für alle $\delta > 0$, $T > 0$ und $\varepsilon > 0$.

Beweis. i) Zu jedem $\delta > 0$ und jeder Partition gibt es ein $\delta' > \delta$, so dass die Partition auch für δ' zulässig ist. Somit muss $w'(x, \delta, T)$ rechtsstetig in δ sein.

Sei $N \geq 1$ und $\{\tau_k^N\}$ wie in (2.8) definiert. Für $0 < \delta < \min\{\tau_{k+1}^N - \tau_k^N : \tau_k^N \leq T\}$ (existiert, da cadlag), gilt $w'(x, \delta, T) \leq 2N^{-1}$.

ii) Aus Proposition 2.25 folgt, dass es $\{\lambda_n\} \subset \Lambda'$ gibt, so dass (2.5) und (2.7) gelten, wenn man T durch $T + \delta$ ersetzt. Sei $y_n(t) = x(\lambda_n(t))$ und $\delta_n = \sup_{0 \leq t \leq T} (\lambda_n(t + \delta) - \lambda_n(t))$. Dann folgt aus (2.9) und i)

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} w'(x_n, \delta, T) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} w'(y_n, \delta, T) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} w'(x, \delta_n, \lambda_n(T)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} w'(x, \delta_n \vee \delta, T + \varepsilon) = w'(x, \delta, T + \varepsilon) . \end{aligned}$$

$\square$

Satz 2.29. Sei (S, d) vollständig. Dann ist der Abschluss von $A \subset D_S[0, \infty)$ genau dann kompakt, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

- i) Für jedes $t \in \mathbb{Q}_+$ gibt es eine kompakte Menge $\Gamma_t \in S$, so dass $x(t) \in \Gamma_t$ für alle $x \in A$.
- ii) Für jedes $T > 0$ gilt

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in A} w'(x, \delta, T) = 0 .$$

Beweis. Nehmen wir an, A erfüllt die beiden Bedingungen. Sei $\ell \geq 1$. Wir wählen $\delta_\ell \in (0, \frac{1}{2})$, so dass $\sup_{x \in A} w'(x, \delta_\ell, \ell) \leq \ell^{-1}$. Weiter wählen wir $m_\ell > \delta_\ell^{-1} \geq 2$. Wir definieren $\Gamma^{(\ell)} = \bigcup_{i=0}^{(\ell+1)m_\ell} \Gamma_{i/\ell_\ell}$ und $A_\ell = A(\Gamma^{(\ell)}, \delta_\ell)$, wobei wir die Notation aus Hilfssatz 2.27 verwenden. Für $x \in A$ gibt es eine Partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < \ell \leq t_n < \ell + 1 < t_{n+1} = \infty$ mit $\min_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) > \delta_\ell$, so dass $\max_{1 \leq i \leq n} \sup_{s, t \in [t_{i-1}, t_i)} r(x(s), x(t)) \leq 2\ell^{-1}$. Wir definieren $x' \in A_\ell$ durch $x'(t) = x(\lfloor m_\ell t + 1 \rfloor / m_\ell)$ für $t_i \leq t < t_{i+1}$. Dann ist $\sup_{0 \leq t < \ell} r(x'(t), x(t)) \leq 2\ell^{-1}$. Also

$$d(x', x) \leq \int_0^\infty e^{-u} \sup_{t \geq 0} (r(x'(t \wedge u), x(t \wedge u)) \wedge 1) du \leq 2\ell^{-1} + e^{-\ell} < 3\ell^{-1} .$$

Somit ist $A \subset A_\ell^{3/\ell}$. Wir wissen aus Hilfssatz 2.27, dass $\bar{A}_\ell$ kompakt ist. Da damit $A \subset \bigcap_{\ell \geq 1} A_\ell^{3/\ell}$ total beschränkt ist, hat A einen kompakten Abschluss.

Nehmen wir nun an, dass der Abschluss von A kompakt ist. Sei $\{x_n(t)\} \subset S$ eine Folge mit $x_n \in A$. Da A einen kompakten Abschluss hat, können wir annehmen, dass $\{x_n\}$ einen Grenzwert x hat. Es gibt nach Proposition 2.25 eine Folge $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$, so dass $r(x_n(t), x(\lambda_n(t))) \rightarrow 0$. Wir wissen (siehe (2.5)), dass $\lambda_n(t) \rightarrow t$. Da aber der Grenzwert von $s \rightarrow t$ von $x(s)$ von beiden Seiten existiert, gibt es eine Teilfolge, so dass $x(\lambda_n(t))$ konvergiert. Somit gibt es eine konvergente Teilfolge von $\{x_n(t)\}$, das heisst, der Abschluss Γ_t von $\{y(t) : y \in A\}$ ist kompakt.

Nehmen wir an, dass es ein $\eta > 0$, $T > 0$ und eine Folge $\{x_n\} \subset A$ gibt, so dass $w'(x_n, n^{-1}, T) \geq \eta$ für alle n . Da A einen kompakten Abschluss hat, können wir annehmen, dass es ein $x \in D_S[0, \infty)$ gibt, so dass $d(x_n, x) \rightarrow 0$. Aus Hilfssatz 2.28 ii) schliessen wir, dass $\eta \leq \lim_{n \rightarrow \infty} w'(x, \delta, T) \leq w'(x, \delta, T+1)$ für jedes $\delta > 0$. Lassen wir nun aber $\delta \rightarrow 0$, ergibt sich aus Aus Hilfssatz 2.28 i) ein Widerspruch. $\square$

2.7. Konvergenz in Verteilung auf $D_S[0, \infty)$

Sei (E, r) ein metrischer Raum. Wir bezeichnen mit $\mathcal{S}_E$ die Borel- σ -Algebra auf $D_E[0, \infty)$ und mit $\mathcal{S}'_E$ die Borel σ -Algebra, die durch die Koordinatenabbildungen erzeugt wird.

Proposition 2.30. *Sei D eine dichte Teilmenge von $[0, \infty)$. Es gilt $\sigma(\pi_t : t \in D) = \mathcal{S}'_E \subset \mathcal{S}_E$. Ist E separabel, so ist $\mathcal{S}'_E = \mathcal{S}_E$.*

Beweis. Für $\varepsilon > 0$, $t \geq 0$ und $f \in \bar{C}(E)$ definiert $f_t^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \int_t^{t+\varepsilon} f(\pi_s(x)) \, ds$ eine stetige Funktion $f_t^\varepsilon(x)$ auf $D_E[0, \infty)$. Da $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_t^\varepsilon(x) = f(\pi_t(x))$, ist $f \circ \pi_t$ Borel-messbar für jedes $f \in \bar{C}(E)$, und damit auch für jedes $f \in B(E)$. Also ist

$$\pi_t^{-1}(\Gamma) = \{x \in D_E[0, \infty) : \mathbb{1}_\Gamma(\pi_t(x)) = 1\} \in \mathcal{S}_E.$$

Da die Mengen $\pi_t^{-1}(\Gamma) \in \mathcal{S}'_E$ erzeugen, gilt $\mathcal{S}'_E \subset \mathcal{S}_E$. Für $t \geq 0$ sei $\{t_n\} \subset D \cap [t, \infty)$, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$. Dann ist $\pi_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{t_n}$ wegen der Rechtsstetigkeit und somit $\sigma(\pi_s : s \in D)$ -messbar. Damit ist der erste Teil der Aussage gezeigt.

Sei nun E separabel. Sei $n \geq 1$ und $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = \infty$. Für $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$ setzen wir $\eta(\alpha_0, \dots, \alpha_n)(t) = \alpha_i$ für $t_i \leq t < t_{i+1}$. Dann ist $\eta(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in D_E[0, \infty)$. Aus $d(\eta(\alpha_0, \dots, \alpha_n), \eta(\alpha'_0, \dots, \alpha'_n)) \leq \max_i r(\alpha_i, \alpha'_i)$, folgt, dass η eine stetige Abbildung von E^{n+1} nach $D_E[0, \infty)$ ist. Sei $z \in D_E[0, \infty)$. Die Abbildung $d(z, \cdot)$ ist stetig. Somit ist $d(z, \eta \circ (\pi_{t_0}, \dots, \pi_{t_n}))$ auch $\mathcal{S}'_E$ -messbar. Für $m \geq 1$ sei η_m die Funktion η mit $n = m^2$ und $t_i = i/m$. Dann folgt, dass $\lim_{m \rightarrow \infty} d(z, \eta_m(\pi_{t_0}(x), \dots, \pi_{t_{m^2}}(x))) = d(z, x)$. Also ist $d(z, x)$ auch $\mathcal{S}'_E$ -messbar. Das bedeutet, dass jeder offene Ball in $D_E[0, \infty)$ auch in $\mathcal{S}'_E$ ist. Nach Satz 2.26 ist $D_E[0, \infty)$ separabel. Also enthält $\mathcal{S}'_E$ alle offenen Mengen in $D_E[0, \infty)$, und somit auch $\mathcal{S}_E$. $\square$

Satz 2.31. *Sei (S, r) vollständig und separabel und sei $\{X_\alpha\}$ eine Familie von Prozessen mit Pfaden in $D_S[0, \infty)$. Dann ist $\{X_\alpha\}$ genau dann relativ kompakt, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- i) Für jedes $\eta > 0$ und $t \in \mathbb{Q}_+$ gibt es eine kompakte Menge $\Gamma_{\eta, t} \subset S$, so dass $\inf_\alpha \mathbb{P}[X_\alpha(t) \in \Gamma_{\eta, t}] \geq 1 - \eta$.
- ii) Für jedes $\eta > 0$ und $T > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\sup_\alpha \mathbb{P}[w'(X_\alpha, \delta, T) \geq \eta] \leq \eta$.

Beweis. Ist $\{X_\alpha\}$ relativ kompakt, so folgen die beiden Bedingungen aus den Sätzen 2.26, 2.14 und 2.29.

Nehmen wir nun die beiden Bedingungen an. Sei $0 < \varepsilon < 1$, $T \in \mathbb{N}$, so dass $e^{-T} < \varepsilon/2$, $\eta = \varepsilon/4$ und $\delta > 0$, so dass $\sup_\alpha \mathbb{P}[w'(X_\alpha, \delta, T) \geq \eta] \leq \eta$. Wir wählen $m > 1/\delta$ und setzen $\Gamma = \bigcup_{i=0}^{mT} \Gamma_{\varepsilon 2^{-i-2}, i/m}$. Aus $\mathbb{P}[X_\alpha(i/m) \notin \Gamma^{\varepsilon/4}] \leq \varepsilon 2^{-i-2}$ schliessen wir, dass

$$\inf_\alpha \mathbb{P}[X_\alpha(i/m) \in \Gamma^{\varepsilon/4}, i = 0, 1, \dots, mT] \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir setzen $A = A(\Gamma, \delta)$ in der Notation von Hilfssatz 2.27, und erinnern uns, dass A einen kompakten Abschluss hat. Sei nun $x \in D_S[0, \infty)$ mit $w'(x, \delta, T) < \varepsilon/4$ und $x(i/m) \in \Gamma^{\varepsilon/4}$ für $i = 0, 1, \dots, mT$. Wir wählen $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < T \leq t_{n+1}$, so dass $\min_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) > \delta$ und $\max_{1 \leq i \leq n} \sup_{t, s \in [t_{i-1}, t_i]} r(x(s), x(t)) < \varepsilon/4$. Weiter wählen wir $\{y_i\} \subset \Gamma$, so dass $r(x(i/m), y_i) < \varepsilon/4$. Definieren wir nun $x'(t) = y_{\lfloor mt_{i-1} + 1 \rfloor}$ für $t_{i-1} \leq t < t_i$ und $i \leq n$ und $x'(t) = y_{\lfloor mt_n + 1 \rfloor}$ für $t \geq t_n$. Dann gilt $\sup_{0 \leq t < T} r(x(t), x'(t)) < \varepsilon/2$ und damit $d(x, x') < \varepsilon/2 + e^{-T} < \varepsilon$. Also ist $x \in A^\varepsilon$. Also haben wir gezeigt, dass $\inf_\alpha \mathbb{P}[X_\alpha \in A^\varepsilon] \geq 1 - \varepsilon$. Aus den Sätzen 2.26 und 2.14 folgt dann, dass $\{X_\alpha\}$ relativ kompakt ist. $\square$

Für einen Prozess X bezeichnen wir mit $D(X)$ die Menge der Punkte t , an denen $\mathbb{P}[X(t) = X(t-)] = 1$.

Hilfssatz 2.32. Sei X ein Prozess mit Pfaden in $D_S[0, \infty)$. Dann gibt es höchstens abzählbar viele Punkte in $[0, \infty)$, die nicht in $D(X)$ sind.

Beweis. Seien $\varepsilon, \delta, T > 0$. Nehmen wir an, dass es unendliche viele Punkte $\{t_n\}$ in $\{0 \leq t \leq T : \mathbb{P}[r(X(t), X(t-)) \geq \varepsilon] \geq \delta\}$ gibt, dann

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} \{r(X(t_m), X(t_m-)) \geq \varepsilon\}\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[\bigcup_{m \geq n} \{r(X(t_m), X(t_m-)) \geq \varepsilon\}\right] \geq \delta.$$

Dann wäre aber $\mathbb{P}[X \in D_S[0, \infty)] < 1$. Also ist $\{t \in (0, \infty) : \mathbb{P}[r(X(t), X(t-)) \geq \varepsilon] \geq \delta\}$ und damit auch $\{t \in (0, \infty) : \mathbb{P}[r(X(t), X(t-)) \geq \varepsilon] > 0\}$ abzählbar. Lassen wir $\varepsilon \rightarrow 0$, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 2.33. Sei S separabel und X_n und X seien Prozesse mit Pfaden in $D_S[0, \infty)$.

i) Gilt $X_n \Rightarrow X$, dann gilt

$$(X_n(t_1), \dots, X_n(t_k)) \Rightarrow (X(t_1), \dots, X(t_k)) \quad (2.10)$$

für jede endliche Menge $\{t_1, \dots, t_k\} \subset D(X)$. Weiter, für jede endliche Menge $\{t_1, \dots, t_k\} \subset [0, \infty)$ gibt es Folgen $\{t_i^n\} \subset [t_i, \infty)$, so dass $t_i^n \rightarrow t_i$, so dass $(X_n(t_1^n), \dots, X_n(t_k^n)) \Rightarrow (X(t_1), \dots, X(t_k))$.

ii) Ist $\{X_n\}$ relativ kompakt, und gibt es eine dichte Menge D , so dass (2.10) für jede endliche Menge $\{t_1, \dots, t_k\} \subset D$ gilt, dann gilt $X_n \Rightarrow X$.

Beweis. i) Nehmen wir $X_n \Rightarrow X$ an. Dann ist $D_S[0, \infty)$ separabel (Satz 2.26). Nach Satz 2.10 gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem Y_n und Y mit Pfaden in $D_S[0, \infty)$ definiert sind mit den gleichen Verteilungen wie X_n und X , so dass $Y_n \rightarrow Y$. Ist $t \in D(X) = D(Y)$, so ist π_t stetig bezüglich der Verteilung von Y . Korollar 2.11 impliziert dann, dass $Y_n(t) \rightarrow Y(t)$. Somit folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung folgt aus Hilfssatz 2.32.

ii) Wenn wir eine konvergente Teilfolge betrachten, können wir $X_n \Rightarrow Y$ für einen Prozess Y mit Pfaden in $D_S[0, \infty)$ annehmen. Seien $t_1, \dots, t_k \in D(Y)$ und $f_1, \dots, f_k \in \bar{C}(S)$. Weiter wählen wir $\{t_i^m\} \subset D \cap [t_i, \infty)$, so dass $t_i^m \rightarrow t_i$. Es gibt $n_1 < n_2 < \dots$, so dass $|\mathbb{E}[\prod_{i=1}^k f_i(X(t_i^m))] - \mathbb{E}[\prod_{i=1}^k f_i(X_{n_m}(t_i^m))]| < m^{-1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k f_i(X(t_i)) \right] - \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k f_i(Y(t_i)) \right] \right| &\leq \left| \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k f_i(X(t_i)) \right] - \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k f_i(X(t_i^m)) \right] \right| \\ &\quad + \left| \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k f_i(X(t_i^m)) \right] - \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k f_i(X_{n_m}(t_i^m)) \right] \right| \\ &\quad + \left| \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k f_i(X_{n_m}(t_i^m)) \right] - \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k f_i(Y(t_i)) \right] \right| \end{aligned}$$

für jedes $m \geq 1$. Alle drei Terme auf der rechten Seite konvergieren nach 0. Also gilt $\mathbb{E}[\prod_{i=1}^k f_i(X(t_i))] = \mathbb{E}[\prod_{i=1}^k f_i(Y(t_i))]$. Wegen der Rechtsstetigkeit gilt dies für alle $\{t_1, \dots, t_k\} \in [0, \infty)$. Die Mengen A , für die $\mathbb{P}[X \in A] = \mathbb{P}[Y \in A]$ bilden eine Dynkin-Klasse und enthält somit die endlich-dimensionalen Verteilungen. Also haben X und Y die gleiche Verteilung. Da Y beliebig war, muss jede konvergente Teilfolge den Grenzwert X haben. Also haben wir die Aussage bewiesen. $\square$

2.8. Kriterien für relative Kompaktheit in $D_S[0, \infty)$

Sei $x \in D_S[0, \infty)$. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir $\tau_0 = \sigma_0 = 0$, und

$$\tau_k = \inf\{t > \tau_{k-1} : r(x(t), x(\tau_{k-1})) > \varepsilon/2\}$$

und

$$\sigma_k = \sup\{t \leq \tau_k : r(x(t), x(\tau_k)) \vee r(x(t-), x(\tau_k)) \geq \varepsilon/2\}$$

falls $\tau_k < \infty$ und $\sigma_k = \infty$, falls $\tau_k = \infty$. Wir bemerken, dass $w'(x, \delta, T) < \varepsilon/2$ impliziert, dass $\min\{\tau_{k+1} - \sigma_k : \tau_k < T\} > \delta$. Wir setzen $s_k = (\sigma_k + \tau_k)/2$. Wir bemerken, dass $\sigma_k \leq s_k \leq \tau_k \leq \sigma_{k+1}$, und damit $2s_{k+1} = \sigma_{k+1} + \tau_{k+1} \geq \tau_k + \tau_{k+1}$. Also gilt auch $2(s_{k+1} - s_k) \geq (\tau_k + \tau_{k+1}) - (\sigma_k + \tau_k) = \tau_{k+1} - \sigma_k$.

Hilfssatz 2.34. Sei (S, r) separabel und $\{X_\alpha\}$ eine Familie von Prozessen mit Pfaden in $D_S[0, \infty)$. Seien die Variablen $\tau_k^{\alpha, \varepsilon}$, $\sigma_k^{\alpha, \varepsilon}$ und $s_k^{\alpha, \varepsilon}$ wie oben für $x = X_\alpha$ definiert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) $\liminf_{\delta \downarrow 0} \mathbb{P}_\alpha[w'(X_\alpha, \delta, T) < \varepsilon] = 1, \quad \varepsilon > 0, T > 0.$
- ii) $\liminf_{\delta \downarrow 0} \mathbb{P}_\alpha[\min\{s_{k+1}^{\alpha, \varepsilon} - s_k^{\alpha, \varepsilon} : s_k^{\alpha, \varepsilon} < T\} \geq \delta] = 1, \quad \varepsilon > 0, T > 0.$
- iii) $\liminf_{\delta \downarrow 0} \mathbb{P}_\alpha[\min\{\tau_{k+1}^{\alpha, \varepsilon} - \sigma_k^{\alpha, \varepsilon} : \tau_k^{\alpha, \varepsilon} < T\} \geq \delta] = 1, \quad \varepsilon > 0, T > 0.$

Beweis. “i) $\Rightarrow$ iii)” Sei $w'(X_\alpha, \delta, T) < \varepsilon/2$. Dann muss $\tau_{k+1}^{\alpha, \varepsilon} - \tau_k^{\alpha, \varepsilon} > \delta$ sein, falls $\tau_k^{\alpha, \varepsilon} < T$. Also folgt iii), da $\sigma_k^{\alpha, \varepsilon} \leq \tau_k^{\alpha, \varepsilon}$.

“iii) $\Rightarrow$ ii)” Nehmen wir an, dass $\min\{\tau_{k+1}^{\alpha, \varepsilon} - \sigma_k^{\alpha, \varepsilon} : \tau_k^{\alpha, \varepsilon} < T + \delta\} > 2\delta$. Dann haben wir oben gezeigt, dass $s_{k+1}^{\alpha, \varepsilon} - s_k^{\alpha, \varepsilon} > \delta$ für alle k , so dass $\tau_k^{\alpha, \varepsilon} < T + \delta$. Ist $s_k^{\alpha, \varepsilon} < T$ und $\tau_k^{\alpha, \varepsilon} \geq T + \delta$, so ist $s_{k+1}^{\alpha, \varepsilon} - s_k^{\alpha, \varepsilon} > \tau_k^{\alpha, \varepsilon} - T \geq \delta$. Somit gilt $\min\{s_{k+1}^{\alpha, \varepsilon} - s_k^{\alpha, \varepsilon} : s_k^{\alpha, \varepsilon} < T\} > \delta$ und damit ii).

“ii) $\Rightarrow$ i)” Nehmen wir $\min\{s_{k+1}^{\alpha, \varepsilon} - s_k^{\alpha, \varepsilon} : s_k^{\alpha, \varepsilon} < T\} \geq 2\delta > \delta$ an. Sei $s_k^{\alpha, \varepsilon} \leq t < s < s_{k+1}^{\alpha, \varepsilon}$. Ist $t \leq \tau_k^{\alpha, \varepsilon}$, so ist $r(X_\alpha(t), X_\alpha(\tau_k^{\alpha, \varepsilon})) \leq \varepsilon/2$. Ist $t > \tau_k^{\alpha, \varepsilon}$, so ist $t < \tau_{k+1}^{\alpha, \varepsilon}$, also auch $r(X_\alpha(t), X_\alpha(\tau_k^{\alpha, \varepsilon})) \leq \varepsilon/2$. Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir $r(X_\alpha(t), X_\alpha(s)) \leq \varepsilon$. Somit gilt i). $\square$

Hilfssatz 2.35. Für jedes α sei $0 = s_0^\alpha < s_1^\alpha < \dots$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^\alpha = \infty$. Sei $\Delta_k^\alpha = s_{k+1}^\alpha - s_k^\alpha$, $T > 0$ und $K_\alpha(T) = \max\{k \geq 0 : s_k^\alpha < T\}$. Wir setzen $F(t) = \sup_\alpha \sup_k \mathbb{P}[\Delta_k^\alpha < t, s_k^\alpha < T]$. Dann gilt für alle $\delta > 0$ und $L \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$F(\delta) \leq \sup_\alpha \mathbb{P}\left[\min_{0 \leq k \leq K_\alpha(T)} \Delta_k^\alpha < \delta\right] \leq LF(\delta) + e^T \int_0^\infty Le^{-Lt} F(t) dt.$$

Somit erhält man

$$\limsup_{\delta \downarrow 0} \sup_\alpha \mathbb{P}\left[\min_{0 \leq k \leq K_\alpha(T)} \Delta_k^\alpha < \delta\right] = 0$$

genau dann, wenn $F(0+) = 0$.

Beweis. Die erste Ungleichung ist trivial. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\min_{0 \leq k \leq K_\alpha(T)} \Delta_k^\alpha < \delta\right] &\leq \sum_{k=0}^{L-1} \mathbb{P}[\Delta_k^\alpha < \delta, s_k^\alpha < T] + \mathbb{P}[K_\alpha(T) \geq L] \\
&\leq LF(\delta) + e^T \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{K_\alpha(T) \geq L} \exp\left\{-\sum_{k=0}^{L-1} \Delta_k^\alpha\right\}\right] \\
&\leq LF(\delta) + e^T \prod_{k=0}^{L-1} (\mathbb{E}[\mathbb{1}_{s_k^\alpha < T} e^{-L\Delta_k^\alpha}])^{1/L} \\
&\leq LF(\delta) + e^T \prod_{k=0}^{L-1} \left(\int_0^\infty L e^{-Lt} \mathbb{P}[s_k^\alpha < T, \Delta_k^\alpha < t] dt\right)^{1/L} \\
&\leq LF(\delta) + e^T \int_0^\infty L e^{-Lt} F(t) dt.
\end{aligned}$$

Die zweite Aussage erhält man, wenn man zuerst $\delta \downarrow 0$ gehen lässt, und danach $L \rightarrow \infty$. $\square$

Proposition 2.36. *Unter den Annahmen von Hilfssatz 2.34 sind die Aussagen des Hilfssatzes auch äquivalent zu*

$$\text{iv)} \quad \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\alpha} \sup_{k \geq 0} \mathbb{P}[\tau_{k+1}^{\alpha, \varepsilon} - \sigma_k^{\alpha, \varepsilon} < \delta, \tau_k^{\alpha, \varepsilon} < T] = 0, \quad \varepsilon > 0, T > 0.$$

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[s_{k+1}^{\alpha, \varepsilon} - s_k^{\alpha, \varepsilon} < \delta/2, s_k^{\alpha, \varepsilon} < T] &\leq \mathbb{P}[\tau_{k+1}^{\alpha, \varepsilon} - \sigma_k^{\alpha, \varepsilon} < \delta, \tau_k^{\alpha, \varepsilon} < T + \delta] \\
&\leq \mathbb{P}[s_{k+1}^{\alpha, \varepsilon} - s_k^{\alpha, \varepsilon} < \delta, s_k^{\alpha, \varepsilon} < T + \delta].
\end{aligned}$$

Wir bemerken weiter, dass $s_k^{\alpha, \varepsilon} \rightarrow \infty$. Gelten nun die Aussagen aus Hilfssatz 2.34, so konvergiert nach Hilfssatz 2.35 $\mathbb{P}[s_{k+1}^{\alpha, \varepsilon} - s_k^{\alpha, \varepsilon} < \delta, s_k^{\alpha, \varepsilon} < T + \delta]$ nach 0. Somit folgt aus den obigen Betrachtungen die Behauptung. Gilt iv), so folgt aus den obigen Betrachtungen und aus Hilfssatz 2.35 die Aussage ii). $\square$

Wir bezeichnen mit $S(T)$ die Klasse der $\{\mathcal{F}_{t+}^X\}$ -Stopppzeiten, die durch T begrenzt sind.

Hilfssatz 2.37. *Sei (S, r) separabel und X ein Prozess mit Pfaden in $D_S[0, \infty)$, $T > 0$ und $\beta > 0$. Dann gilt für jedes $\delta > 0$, $0 < \lambda < 1$ und $\tau \in S(T)$*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\sup_{0 \leq u \leq \delta} r(X(\tau + u), X(\tau)) \geq \lambda, \sup_{0 \leq v \leq \delta \wedge \tau} r(X(\tau), X(\tau - v)) \geq \lambda\right] \\
\leq \lambda^{-2\beta} a_\beta [1 + 2a_\beta^2(1 + 4a_\beta)] C(\delta) \quad (2.11)
\end{aligned}$$

und

$$\mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq u \leq \delta} r(X(u), X(0)) \geq \lambda \right] \leq \lambda^{-2\beta} a_\beta \{a_\beta(1 + 4a_\beta)C(\delta) + \mathbb{E}[r^\beta(X(\delta), X(0)) \wedge 1]\} ,$$

wobei

$$C(\delta) = \sup_{\tau \in S(T+2\delta)} \sup_{0 \leq u \leq 2\delta} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq v \leq 3\delta \wedge \tau} r^\beta(X(\tau+u), X(\tau)) r^\beta(X(\tau), X(\tau-v)) \wedge 1 \right]$$

und $a_\beta = 2^{(\beta-1)^+}$.

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass für $c, d \geq 0$ die Ungleichung $(c+d)^\beta \leq a_\beta(c^\beta + d^\beta)$ gilt. Wir dürfen annehmen, dass $r \leq 1$.

Sei $\tau \in S(T+\delta)$ und bezeichnen wir mit $M_\tau(\delta)$ die Klasse der $\{\mathcal{F}_{\tau+}^X\}$ -messbaren Zufallsvariablen mit $0 \leq U \leq \delta$. Sei $U \in M_\tau(\delta)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} r^\beta(X(\tau+U), X(\tau)) &\leq \frac{a_\beta}{\delta} \int_\delta^{2\delta} [r^\beta(X(\tau+\theta), X(\tau)) + r^\beta(X(\tau+\theta), X(\tau+U))] d\theta \\ &\leq \frac{a_\beta}{\delta} \left[\int_\delta^{2\delta} r^\beta(X(\tau+\theta), X(\tau)) d\theta + \int_0^{2\delta} r^\beta(X(\tau+U+\theta), X(\tau+U)) d\theta \right]. \end{aligned}$$

Daraus folgern wir mittels der Dreiecksungleichung, dass

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leq v < 2\delta \wedge \tau} r^\beta(X(\tau+U), X(\tau)) r^\beta(X(\tau), X(\tau-v)) \\ &\leq \frac{a_\beta}{\delta} \left[\int_\delta^{2\delta} \sup_{0 \leq v < 2\delta \wedge \tau} r^\beta(X(\tau+\theta), X(\tau)) r^\beta(X(\tau), X(\tau-v)) d\theta \right. \\ &\quad + a_\beta \int_0^{2\delta} \sup_{0 \leq v < 2\delta \wedge \tau} r^\beta(X(\tau+U+\theta), X(\tau+U)) r^\beta(X(\tau+U), X(\tau-v)) d\theta \\ &\quad \left. + a_\beta \int_0^{2\delta} r^\beta(X(\tau+U+\theta), X(\tau+U)) r^\beta(X(\tau+U), X(\tau)) d\theta \right] \\ &\leq \frac{a_\beta}{\delta} \left[\int_\delta^{2\delta} \sup_{0 \leq v < 2\delta \wedge \tau} r^\beta(X(\tau+\theta), X(\tau)) r^\beta(X(\tau), X(\tau-v)) d\theta \right. \\ &\quad + 2a_\beta \int_0^{2\delta} \sup_{0 \leq v < 3\delta \wedge (\tau+U)} r^\beta(X(\tau+U+\theta), X(\tau+U)) \\ &\quad \left. \times r^\beta(X(\tau+U), X(\tau+U-v)) d\theta \right]. \end{aligned}$$

Da $\tau+U \in S(T+2\delta)$, folgern wir

$$\begin{aligned} &\sup_{\tau \in S(T+\delta)} \sup_{U \in M_\tau(\delta)} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq v < 2\delta \wedge \tau} r^\beta(X(\tau+U), X(\tau)) r^\beta(X(\tau), X(\tau-v)) \right] \\ &\leq a_\beta(1 + 4a_\beta)C(\delta). \end{aligned}$$

Wählen wir $0 < \eta < \lambda$ und $\tau \in S(T)$ und definieren $\Delta = \inf\{t > 0 : r(X(\tau + t), X(\tau)) > \lambda - \eta\}$. Für $0 \leq v \leq \delta \wedge \tau$ haben wir

$$\begin{aligned} r^\beta(X(\tau + \Delta \wedge \delta), X(\tau)) r^\beta(X(\tau), X(\tau - v)) \\ \leq a_\beta r^\beta(X(\tau + \delta), X(\tau)) r^\beta(X(\tau), X(\tau - v)) \\ + a_\beta^2 r^\beta(X(\tau + \delta), X(\tau + \Delta \wedge \delta)) r^\beta(X(\tau + \Delta \wedge \delta), X(\tau)) \\ + a_\beta^2 r^\beta(X(\tau + \delta), X(\tau + \Delta \wedge \delta)) r^\beta(X(\tau + \Delta \wedge \delta), X(\tau - v)) . \end{aligned}$$

Da $\tau + \Delta \wedge \delta \in S(T + \delta)$, $\delta - \Delta \wedge \delta \in M_{\tau + \Delta \wedge \delta}(\delta)$ und $\Delta \wedge \delta + v \leq 2\delta$, erhalten wir

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq v \leq \delta \wedge \tau} r^\beta(X(\tau + \Delta \wedge \delta), X(\tau)) r^\beta(X(\tau), X(\tau - v)) \right] \leq [a_\beta + 2a_\beta^3(1 + 4a_\beta)]C(\delta) .$$

Die linke Seite von (2.11) ist durch $(\lambda - \eta)^{-\beta} \lambda^{-\beta}$ mal die linke Seite der obigen Ungleichung beschränkt. Lassen wir $\eta \downarrow 0$, folgt (2.11).

Wählen wir nun $\tau = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} r^{2\beta}(X(\Delta \wedge \delta), X(0)) &\leq a_\beta [r^\beta(X(\delta), X(\Delta \wedge \delta)) r^\beta(X(\Delta \wedge \delta), X(0)) \\ &\quad + r^\beta(X(\delta), X(0)) r^\beta(X(\Delta \wedge \delta), X(0))] \\ &\leq a_\beta [r^\beta(X(\delta), X(\Delta \wedge \delta)) r^\beta(X(\Delta \wedge \delta), X(0)) + r^\beta(X(\delta), X(0))] . \end{aligned}$$

Die Aussage folgt nun analog. □

Satz 2.38. Sei (S, r) vollständig und separabel und $\{X_\alpha\}$ eine Familie von Prozessen mit Pfaden in $D_S[0, \infty)$. Es gelte die Bedingung i) aus Satz 2.31. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- i) $\{X_\alpha\}$ ist relativ kompakt.
- ii) Für jedes $T > 0$ gibt es ein $\beta > 0$ und eine Familie $\{\gamma_\alpha(\delta) : 0 < \delta < 1\}$ von positiven Zufallsvariablen, so dass

$$\mathbb{E}[r^\beta(X_\alpha(t+u), X_\alpha(t)) \wedge 1 \mid \mathcal{F}_t^\alpha] (r^\beta(X_\alpha(t), X_\alpha(t-v)) \wedge 1) \leq \mathbb{E}[\gamma_\alpha(\delta) \mid \mathcal{F}_t^\alpha] \quad (2.12)$$

für $0 \leq t \leq T$, $0 \leq u \leq \delta$ und $0 \leq v \leq \delta \wedge t$, wobei $\{\mathcal{F}_t^\alpha\}$ die natürliche Filtration von X_α ist. Und weiter gilt $\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_\alpha \mathbb{E}[\gamma_\alpha(\delta)] = 0$ und

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_\alpha \mathbb{E}[r^\beta(X_\alpha(\delta), X_\alpha(0)) \wedge 1] = 0 . \quad (2.13)$$

iii) Für jedes $T > 0$ gibt es ein $\beta > 0$, so dass (2.13) gilt und für die Grössen

$$C_\alpha(\delta) = \sup_{\tau \in S_0^\alpha(T)} \sup_{0 \leq u \leq \delta} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq v \leq \delta \wedge \tau} (r^\beta(X_\alpha(\tau + u), X_\alpha(\tau)) \wedge 1) \right. \\ \left. \times (r^\beta(X_\alpha(\tau), X_\alpha(\tau - v)) \wedge 1) \right]$$

der Grenzwert $\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_\alpha C_\alpha(\delta) = 0$ gilt. $S_0^\alpha(T)$ bezeichnet die Klasse der diskreten $\{\mathcal{F}_t^\alpha\}$ -Stoppzeiten, die durch T beschränkt sind.

Beweis. Wir können annehmen, dass $r \leq 1$.

“i) $\Rightarrow$ ii)” Wir haben

$$r(X_\alpha(t + u), X_\alpha(t)) r(X_\alpha(t), X_\alpha(t - v)) \leq r(X_\alpha(t + u), X_\alpha(t)) \wedge r(X_\alpha(t), X_\alpha(t - v)) \\ \leq w'(X_\alpha, 2\delta, T + \delta)$$

und $r(X_\alpha(\delta), X_\alpha(0)) \leq w'(X_\alpha, \delta, T)$. Wählen wir $\gamma_\alpha(\delta) = w'(X_\alpha, 2\delta, T + \delta)$, so folgt die Behauptung aus Satz 2.31.

“ii) $\Rightarrow$ iii)” Sei $\tau \in S_0^\alpha(T)$ fest. Multiplizieren wir in (2.12) beide Seiten mit $\mathbb{1}_{\tau=z}$ und addieren über alle Werte, die τ annimmt, sehen wir, dass wir t durch τ ersetzen können. Weiter können wir die rechte Seite durch das Supremum über $v \in [0, \delta \wedge t] \cap \mathbb{Q}$, und damit über $v \in [0, \delta \wedge t]$ ersetzen. Somit gilt iii).

“iii) $\Rightarrow$ i)” Aus der Konstruktion von $\{\tau_k^{\alpha, \varepsilon}\}$ und $\{\sigma_k^{\alpha, \varepsilon}\}$ und der Definition von $C_\alpha(\delta)$ folgt, dass die Bedingung iv) aus Proposition 2.36 erfüllt ist. Somit gilt die Bedingung i) aus Hilfssatz 2.34. Aus Satz 2.31 folgt dann i). $\square$

2.9. Weitere Kriterien für relative Kompaktheit in $D_S[0, \infty)$

Satz 2.39. Sei (S, d) vollständig und separabel. Sei $\{X_\alpha\}$ eine Familie von Prozessen mit Pfaden in $D_S[0, \infty)$. Nehmen wir an, dass es für jedes $\eta > 0$ und $T > 0$ eine kompakte Menge $\Gamma_{\eta, T} \subset S$ gibt, so dass

$$\inf_\alpha \mathbb{P}[X_\alpha(t) \in \Gamma_{\eta, T} \text{ für } 0 \leq t \leq T] \geq 1 - \eta \quad (2.14)$$

gilt. Sei H eine Teilmenge von $\bar{C}(S)$, die dicht ist in $\bar{C}(S)$ in der Topologie der gleichmässigen Konvergenz auf kompakten Mengen. Dann ist $\{X_\alpha\}$ relativ kompakt genau dann, wenn $\{f \circ X_\alpha\}$ relativ kompakt ist für jedes $f \in H$.

Beweis. Die Abbildung $D_S[0, \infty) \rightarrow D_{\mathbb{R}}[0, \infty)$, $x \mapsto f \circ x$ ist stetig (Übung). Somit folgt aus der relativen Kompaktheit von $\{X_\alpha\}$, dass auch $\{f \circ X_\alpha\}$ relativ kompakt ist.

Sei nun $\{f \circ X_\alpha\}$ relativ kompakt für jedes $f \in H$. Wir können annehmen, dass $r \leq 1$. Aus der Voraussetzung, (2.9) und Satz 2.31 folgt, dass $\{f \circ X_\alpha\}$ relativ kompakt ist für jedes $f \in \bar{C}(S)$. Insbesondere ist für $z \in S$ die Menge der Abbildungen $\{t \mapsto r(X_\alpha(t), z)\}$ relativ kompakt. Sei $\eta > 0$ und $T > 0$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge $\{z_1, \dots, z_N\} \subset \Gamma_{\eta, T}$, so dass $\min_{1 \leq i \leq N} r(x, z_i) < \varepsilon$ für alle $x \in \Gamma_{\eta, T}$. Ist $y \in \Gamma_{\eta, T}$, so gibt es ein z_i , so dass $r(y, z_i) < \varepsilon$. Also haben wir

$$r(x, y) \leq r(x, z_i) + r(y, z_i) < r(x, z_i) - r(y, z_i) + 2\varepsilon \leq |r(x, z_i) - r(y, z_i)| + 2\varepsilon.$$

Somit gilt für $0 \leq t \leq T$, $\delta \in (0, 1)$, $0 \leq u \leq \delta$ und $0 \leq v \leq \delta \wedge t$

$$\begin{aligned} & r(X_\alpha(t+u), X_\alpha(t))r(X_\alpha(t), X_\alpha(t-v)) \\ & \leq \bigvee_{i=1}^N |r(X_\alpha(t+u), z_i) - r(X_\alpha(t), z_i)| |r(X_\alpha(t), z_i) - r(X_\alpha(t-v), z_i)| \\ & \quad + 4(\varepsilon + \varepsilon^2) + \mathbb{1}_{X_\alpha(s) \notin \Gamma_{\eta, T} \text{ für ein } s \in [0, T]} \\ & \leq \bigvee_{i=1}^N w'(q(\cdot, z_i) \circ X_\alpha, 2\delta, T + \delta) + 4(\varepsilon + \varepsilon^2) + \mathbb{1}_{X_\alpha(s) \notin \Gamma_{\eta, T} \text{ für ein } s \in [0, T]} \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_\alpha(\delta). \end{aligned}$$

Nach Satz 2.31 gilt $\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_\alpha \mathbb{E}[w'(q(\cdot, z) \circ X_\alpha, 2\delta, T + \delta)] = 0$ für jedes $z \in S$. Also können wir Funktionen $\eta(\delta)$ und $\varepsilon(\delta)$ wählen, so dass $\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_\alpha \mathbb{E}[\gamma_\alpha(\delta)] = 0$. Analog erhalten wir

$$r(X_\alpha(\delta), X_\alpha(0)) \leq \bigvee_{i=1}^N |r(X_\alpha(\delta), z_i) - r(X_\alpha(0), z_i)| + 2\varepsilon + \mathbb{1}_{X_\alpha(0) \notin \Gamma_{\eta, T}}$$

für alle $\delta > 0$. Somit konvergiert auch $\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_\alpha \mathbb{E}[r(X_\alpha(\delta), X_\alpha(0))] = 0$. Nach Satz 2.38 ist $\{X_\alpha\}$ relativ kompakt. $\square$

Korollar 2.40. Sei (S, r) vollständig und separabel und $\{X_n\}$ eine Folge von Prozessen mit Pfaden in $D_S[0, \infty)$. Sei $M \subset \bar{C}(S)$ eine punkttrennende Menge. Falls es einen Prozess X mit Pfaden in $D_S[0, \infty)$ gibt, so dass für jede endliche Menge $\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \subset M$ gilt, $(g_1, \dots, g_n) \circ X_n \Rightarrow (g_1, \dots, g_n) \circ X$. Dann gilt $X_n \Rightarrow X$.

Beweis. Sei H die kleinste Algebra, die $M \cup \{1\}$ enthält. Nach dem Satz von Stone-Weierstrass ist H dicht in $\bar{C}(E)$ bezüglich der Topologie der gleichmässigen Konvergenz auf kompakten Mengen. Dann gilt $(g_1, \dots, g_n) \circ X_n \Rightarrow (g_1, \dots, g_n) \circ X$ für alle $\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \subset H$. Wir müssen somit (2.14) zeigen.

Sei $\Gamma \subset S$ kompakt und $\delta > 0$. Für $x \in S$ wählen wir $\{h_1^x, \dots, h_{k(x)}^x\} \subset H$, so dass $\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y: r(x,y) \geq \delta} \max_{1 \leq i \leq k(x)} |h_i^x(y) - h_i^x(x)| > 0$. Sei $U_x = \{y \in S : \max_{1 \leq i \leq k(x)} |h_i^x(y) - h_i^x(x)| < \varepsilon(x)\}$. Dann ist $\Gamma \subset \bigcup_{x \in \Gamma} U_x \subset \Gamma^\delta$. Da die Funktionen stetig sind ist U_x offen. Also gibt es eine endliche Menge $\{x_1, \dots, x_N\} \subset \Gamma$, so dass $\Gamma \subset \bigcup_{\ell=1}^N U_{x_\ell} \subset \Gamma^\delta$. Definieren wir die Abbildung $\sigma : D_{\mathbb{R}}[0, \infty) \rightarrow D_{\mathbb{R}}[0, \infty)$, $x \mapsto \sigma(x)(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} x(s)$. Die Abbildung ist stetig (Proposition 2.25). Sei $g_\ell(x) = \max_{1 \leq i \leq k(x_\ell)} |h_i^{x_\ell}(x) - h_i^{x_\ell}(x_\ell)|$, $Y_n(t) = \min_{1 \leq \ell \leq N} \{g_\ell(X_n(t)) - \varepsilon(x_\ell)\}$ und $Z_n = \sigma(Y_n)$. Aus der Voraussetzung und der Stetigkeit von σ folgt, dass $Z_n \Rightarrow Z$, wobei Z analog zu Z_n aus X konstruiert wird. Für ein $T > 0$, so dass $Z(t)$ stetig in T ist, gilt dann

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n(t) \in \Gamma^\delta \text{ für } 0 \leq t \leq T] &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z_n(T) < 0] \geq \mathbb{P}[Z(T) < 0] \\ &\geq \mathbb{P}[X(t) \in \Gamma \text{ für } 0 \leq t \leq T], \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\sup_{x \in \Gamma} \min_{1 \leq i \leq N} \{g_i(x) - \varepsilon(x_i)\} < 0$. Sei $\eta > 0$, $T > 0$ ein Stetigkeitspunkt von Z und $m \geq 1$. Nach Hilfssatz 2.13 und Satz 2.26 gibt es eine kompakte Menge $\Gamma_{0,m} \subset S$, so dass $\mathbb{P}[X(t) \in \Gamma_{0,m} \text{ für } 0 \leq t \leq T] \geq 1 - \eta 2^{-m-1}$. Dann gibt es ein $n_m \geq 1$, so dass $\inf_{n \geq n_m} \mathbb{P}[X_n(t) \in \Gamma_{0,m}^{1/m} \text{ für } 0 \leq t \leq T] \geq 1 - \eta 2^{-m}$. Für $n = 1, \dots, n_m - 1$ können wir eine kompakte Menge $\Gamma_{n,m} \subset S$ wählen, so dass $\mathbb{P}[X_n(t) \in \Gamma_{n,m}^{1/m} \text{ für } 0 \leq t \leq T] \geq 1 - \eta 2^{-m}$. Die Menge $\Gamma_n = \bigcup_{i=0}^{n_m-1} \Gamma_{i,m}$ ist kompakt, und $\inf_{n \geq 1} \mathbb{P}[X_n(t) \in \Gamma_n^{1/m} \text{ für } 0 \leq t \leq T] \geq 1 - \eta 2^{-m}$. Wir wählen nun $\Gamma_{\eta,T} = \bigcap_{m \geq 1} \Gamma_m^{1/m}$. Die Menge ist abgeschlossen und total beschränkt und damit kompakt, und erfüllt (2.14). Da H dicht in $\bar{C}(S)$ ist, und $\bar{C}(S)$ dicht in $B(E)$ ist, ist es nun leicht zu zeigen, dass die endlich-dimensionalen Verteilungen von X_n konvergieren. Somit folgt die Behauptung aus Satz 2.39. $\square$

Korollar 2.41. Sei S lokal kompakt und separabel, und S^Δ die Einpunkt-Kompaktifizierung. Ist $\{X_n\}$ eine Folge von Prozessen mit Pfaden in $D_S[0, \infty)$ und $\{f \circ X_n\}$ relativ kompakt für jedes $f \in \hat{C}(S)$ (der Raum der stetigen Funktionen, die in Unendlich verschwinden), dann ist $\{X_n\}$ relativ kompakt als Folge von Prozessen mit Pfaden in $D_{S^\Delta}[0, \infty)$. Gilt zusätzlich, dass $(X_n(t_1), \dots, X_n(t_k)) \Rightarrow (X(t_1), \dots, X(t_k))$ für alle endlichen Teilmengen $\{t_1, \dots, t_k\}$ einer dichten Menge $D \subset [0, \infty)$, für einen Prozess X mit Pfaden in $D_S[0, \infty)$, dann gilt $X_n \Rightarrow X$ in $D_S[0, \infty)$.

Beweis. Ist $f \in C(S^\Delta)$, so ist $f - f(\Delta) \mid_S \in \hat{C}(S)$. Also ist $\{f \circ X_n\}$ relativ kompakt für jedes $f \in C(S^\Delta)$. Somit folgt aus Satz 2.39, dass $\{X_n\}$ relativ kompakt in $D_{S^\Delta}[0, \infty)$. Aus Satz 2.33 folgt, dass $X_n \Rightarrow X$ in $D_{S^\Delta}[0, \infty)$. Aus Korollar 2.18 folgt, dass $X_n \Rightarrow X$ in $D_S[0, \infty)$. $\square$

Satz 2.42. Sei $\{X^\alpha\}$ eine Familie von Prozessen mit Pfaden in $D_S[0, \infty)$ adaptiert zu einer Filtration $\{\mathcal{F}_t^\alpha\}$. Sei $\mathcal{L}^\alpha$ der Banach-Raum der $\{\mathcal{F}_t^\alpha\}$ -adaptierten Prozesse Y mit Norm $\|Y\| = \sup\{\mathbb{E}[|Y_t|] : t \geq 0\} < \infty$, und

$$\hat{\mathcal{A}}^\alpha = \left\{ (Y, Z) \in (\mathcal{L}^\alpha)^2 : Y_t - \int_0^t Z_s \, ds \text{ ist ein } \{\mathcal{F}_t^\alpha\}\text{-Martingal} \right\}.$$

Sei C_a eine Unteralgebra von $\bar{C}(S)$ und sei D die Familie der Funktionen $f \in \bar{C}(S)$, so dass es für jedes $\varepsilon > 0$ und $T > 0$ ein $(Y_\alpha, Z_\alpha) \in \hat{\mathcal{A}}^\alpha$ gibt, so dass

$$\sup_\alpha \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}} |Y_\alpha(t) - f(X_\alpha(t))| \right] < \varepsilon$$

und

$$\sup_\alpha \mathbb{E}[\|Z_\alpha\|_{p, T}] < \infty \quad \text{für ein } p \in (1, \infty],$$

wobei $\|h\|_{p, T} = (\int_0^T |h(t)|^p \, dt)^{1/p}$ für $p < \infty$ und $\|h\|_{\infty, T} = \text{ess sup}\{|h(t)| : 0 \leq t \leq T\}$. Falls C_a im Abschluss von D enthalten ist, dann ist $\{(f_1, \dots, f_k) \circ X_\alpha\}$ relativ kompakt in $D_{\mathbb{R}^k}[0, \infty)$ für alle $f_1, \dots, f_k \in C_a$ und $1 \leq k \leq \infty$.

Beweis. Der Satz ist in [1] bewiesen. $\square$

3. Markov Prozesse

In diesem Kapitel bezeichnet (E, r) einen metrischen Raum, $\mathfrak{B}(E)$ die dazugehörigen Borel-Mengen, $M(E)$ ist die Klasse aller reellen Borel-messbaren Funktionen auf E , $B(E) \subset M(E)$ den Banach-Raum der beschränkten messbaren Funktionen mit der Norm $\|f\| = \sup |f(x)|$ und $\bar{C}(E) \subset B(E)$ den Unterraum der beschränkten stetigen Funktionen. Alle stochastischen Objekte sind auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert.

3.1. Markov Prozesse und Übergangskerne

Definition 3.1. Sei $\{X_t\}$ ein E -wertiger stochastischer Prozess und $\{\mathcal{G}_t\}$ eine Filtration. X heisst **$\{\mathcal{G}_t\}$ -Markov-Prozess**, falls

$$\mathbb{P}[X_{t+s} \in \Gamma \mid \mathcal{G}_t] = \mathbb{P}[X_{t+s} \in \Gamma \mid X_t]$$

für alle $s, t \geq 0$ und $\Gamma \in \mathfrak{B}(E)$. Wir sagen kurz **Markov Prozess**, falls $\{\mathcal{G}_t\} = \{\mathcal{F}_t^X\}$. Wir bezeichnen die Anfangsverteilung mit $\nu(\Gamma) = \mathbb{P}[X_0 \in \Gamma]$.

Definition 3.2. Eine Funktion $P : [0, \infty) \times E \times \mathfrak{B}(E) \rightarrow [0, 1]$ heisst (Zeit-homogener) **Übergangskern**, falls

$$P(t, x, \cdot) \in \mathcal{P}(E) \text{ für alle } (t, x) \in [0, \infty) \times E,$$

$$P(0, x, \{x\}) = 1 \text{ für alle } x \in E,$$

$$P(\cdot, \cdot, \Gamma) \in B([0, \infty) \times E) \text{ für alle } \Gamma \in \mathfrak{B}(E) \text{ und}$$

$$P(t+s, x, \Gamma) = \int P(s, y, \Gamma) P(t, x, dy) \text{ für alle } (s, t, x, \Gamma) \in [0, \infty)^2 \times E \times \mathfrak{B}(E).$$

Ein Übergangskern $P(t, x, \Gamma)$ ist der **Übergangskern eines Zeit-homogenen Markov Prozesses** X , falls

$$\mathbb{P}[X_{t+s} \in \Gamma \mid \mathcal{F}_t^X] = P(s, X_t, \Gamma)$$

für alle $s, t \geq 0$, $\Gamma \in \mathfrak{B}(E)$. Äquivalent dazu könnten wir verlangen, dass

$$\mathbb{E}[f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t^X] = \int f(y) P(s, X_t, dy)$$

für alle $s, t \geq 0$, $f \in B(E)$. Wir zeigen nun, dass es unter schwachen Bedingungen zu einem Übergangskern auch einen entsprechenden Markov Prozess gibt.

Satz 3.3. Sei $P(t, x, \Gamma)$ ein Übergangskern und $\nu \in \mathcal{P}(E)$. Nehmen wir an, dass für jedes $t \geq 0$ das Mass $\int P(t, x, \cdot) \nu(dx)$ straff ist (was zutrifft, wenn (E, r) vollständig und separabel ist, siehe Hilfssatz 2.13). Dann existiert ein Markov Prozess X auf E , dessen endlich-dimensionale Verteilungen eindeutig durch den Übergangskern $P(t, x, \Gamma)$ und die Anfangsverteilung ν bestimmt sind.

Beweis. Für $I \subset [0, \infty)$ bezeichnen wir mit E^I den Produktraum $\prod_{s \in I} E_s$ mit $E_s = E$ und mit $\mathcal{P}_I$ die Wahrscheinlichkeitsmasse auf $\prod_{s \in I} \mathfrak{B}(E_s)$. Sei $\{s_i : i \in \mathbb{N}\} \subset [0, \infty)$ mit $s_i \neq s_j$ für $i \neq j$ und $s_0 = 0$, und $x_0 \in E$. Für $n \geq 1$ sei $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$ die geordnete Menge $\{s_0, \dots, s_n\}$. Dann gibt es ein Mass $\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}_{\{s_i\}}$, so dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n[X_0 \in \Gamma_0, X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n] \\ = \int_{\Gamma_0} \dots \int_{\Gamma_{n-1}} P(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, \Gamma_n) P(t_{n-1} - t_{n-2}, y_{n-2}, dy_{n-1}) \\ \dots P(t_2 - t_1, y_1, dy_2) P(t_1, y_0, dy_1) \nu(dy_0) \end{aligned} \quad (3.1)$$

und $\mathbb{P}_n[X_{s_i} = x_0] = 1$ für alle $i > n$. Die Folge $\{\mathbb{P}_n\}$ ist straff wegen Proposition 2.15. Jeder mögliche Grenzwert erfüllt (3.1). Somit konvergiert $\mathbb{P}_n$ zu einem Mass $\mathbb{P}^{\{s_i\}} \in \mathcal{P}_{\{s_i\}}$. Da die endlich-dimensionalen Verteilungen fest sind, ist dieses Mass eindeutig. Ist $B \in \mathfrak{B}(E^{[0, \infty)})$, so existiert eine abzählbare Menge $\{s_i\}$ und eine Menge $\hat{B} \in \mathfrak{B}(E)^{\{s_i\}}$, so dass $B = \{(X_{s_1}, X_{s_2}, \dots) \in \hat{B}\}$. Es folgt aus der Masstheorie, dass sich das Mass zu einem Mass $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(E^{[0, \infty)})$ fortsetzen lässt, so dass $\mathbb{P}|_{\{s_i\}} = \mathbb{P}^{\{s_i\}}$ für jede abzählbare Folge $\{s_i\}$. Es ist nun nicht schwer zu zeigen, dass der Prozess X Markovsch ist. $\square$

Wir bezeichnen nun mit $\mathbb{P}_\nu$ das Mass auf $\mathfrak{B}(E)^{[0, \infty)}$, das durch obigen Satz beschrieben wird, und mit $\mathbb{P}_x = \mathbb{P}_{\delta_x}$ das Mass mit dem Startwert $x \in E$.

Proposition 3.4. Die Funktion $x \mapsto \mathbb{P}_x(B)$ ist Borel-messbar für jedes $B \in \mathfrak{B}(E)^{[0, \infty)}$.

Beweis. Wählen wir $B = \{X_0 \in \Gamma_0, X_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, X_{t_n} \in \Gamma_n\}$, so gilt die Aussage. Die Klasse $\mathcal{A}$ aller B für die $\mathbb{P}_x(B)$ messbar in x ist, ist ein Dynkin-System. In der Tat, $\mathbb{P}_x[\Omega] = 1$ ist messbar, also ist $\Omega \in \mathcal{A}$. Sind $A, B \in \mathcal{A}$ und $B \subset A$, so ist $\mathbb{P}_x[A \setminus B] = \mathbb{P}_x[A] - \mathbb{P}_x[B]$ messbar. Sind $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, so ist $\mathbb{P}_x[\cup_{i=1}^\infty A_i] = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}_x[A_i]$ messbar. Also ist $\mathcal{A} = \mathfrak{B}(E)^{[0, \infty)}$. $\square$

Definition 3.5. Sei X ein $\{\mathcal{G}_t\}$ -Markov Prozess mit Übergangskern $P(t, x, \Gamma)$. Sei τ eine $\{\mathcal{G}_t\}$ -Stoppzeit mit $\tau < \infty$ f.s. Der Prozess X heisst **stark Markov in τ** , falls

$$\mathbb{P}[X_{\tau+t} \in \Gamma \mid \mathcal{G}_\tau] = P(t, X_\tau, \Gamma)$$

für alle $t \geq 0$ und $\Gamma \in \mathfrak{B}(E)$. X heisst **stark Markov** bezüglich $\{\mathcal{G}_t\}$, falls X stark Markov in τ für alle endlichen $\{\mathcal{G}_t\}$ -Stoppzeiten ist. Wir sagen einfach **stark Markov**, falls $\{\mathcal{G}_t\} = \{\mathcal{F}_t^X\}$,

Proposition 3.6. Sei X ein E -wertiger $\{\mathcal{G}_t\}$ -Markov Prozess mit Übergangskern $P(t, x, \Gamma)$. Sei τ eine diskrete $\{\mathcal{G}_t\}$ -Stoppzeit mit $\tau < \infty$. Dann ist X stark Markov in τ .

Beweis. Seien $t_1, t_2, \dots$ die Werte, die τ annimmt und $f \in B(E)$. Ist $B \in \mathcal{G}_\tau$, dann ist $B \cap \{\tau = t_i\} \in \mathcal{G}_{t_i}$. Also gilt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_{B \cap \{\tau = t_i\}} f(X_{\tau+t}) \, d\mathbb{P} &= \int_{B \cap \{\tau = t_i\}} f(X_{t_i+t}) \, d\mathbb{P} \\ &= \int_{B \cap \{\tau = t_i\}} \int f(y) P(t, X_{t_i}, dy) \, d\mathbb{P} \\ &= \int_{B \cap \{\tau = t_i\}} \int f(y) P(t, X_\tau, dy) \, d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Summieren über i gibt

$$\int_B f(X_{\tau+t}) \, d\mathbb{P} = \int_B \int f(y) P(t, X_\tau, dy) \, d\mathbb{P},$$

oder äquivalent dazu

$$\mathbb{E}[f(X_{\tau+t}) \mid \mathcal{G}_\tau] = \int f(y) P(t, X_\tau, dy).$$

□

Bemerkung. Jede Stoppzeit ist der Grenzwert einer fallenden Folge von diskreten Stoppzeiten. Daher kann die Proposition oft auf allgemeinere Stoppzeiten erweitert werden. ■

Proposition 3.7. Sei X ein E -wertiger $\{\mathcal{G}_t\}$ -Markov Prozess mit Übergangskern $P(t, x, \Gamma)$ und τ eine $\{\mathcal{G}_t\}$ -Stoppzeit. Wir nehmen an, dass X für alle $t \geq 0$ stark Markov in $\tau + t$ ist. Dann gilt

$$\mathbb{P}[X_{\tau+} \in B \mid \mathcal{G}_\tau] = \mathbb{P}_{X_\tau}[B]$$

für alle $B \in \mathfrak{B}(E)^{[0, \infty)}$.

Beweis. Sei zuerst $B = \{X_t \in \Gamma\}$ für ein $t \geq 0$ und $\Gamma \in \mathfrak{B}(E)$.

$$\mathbb{P}[X_{\tau+} \in B \mid \mathcal{G}_\tau] = \mathbb{P}[X_{\tau+t} \in \Gamma \mid \mathcal{G}_\tau] = P(t, X_\tau, \Gamma) = \mathbb{P}_{X_\tau}[B].$$

Nehmen wir nun an, dass die Aussage für alle $B = \cap_{i \leq n} \{X_{t_i} \in \Gamma_i\}$ gilt, wobei $0 \leq t_1 < \dots < t_n$, $\Gamma_i \in \mathfrak{B}(E)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann haben wir für $f_i \in B(E)$

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n f_i(X_{\tau+t_i}) \mid \mathcal{G}_\tau\right] = \int \dots \int \prod_{i=1}^n f_i(y_i) P(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, dy_n) \dots P(t_1, X_\tau, dy_1).$$

Sei $t_{n+1} > t_n$ und $\Gamma_{n+1} \in \mathfrak{B}(E)$. Für $B = \cap_{i \leq n+1} \{X_{t_i} \in \Gamma_i\}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{\tau+} \in B \mid \mathcal{G}_\tau] &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n+1} \mathbb{1}_{\Gamma_i}(X_{\tau+t_i}) \mid \mathcal{G}_\tau\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\Gamma_{n+1}}(X_{\tau+t_{n+1}}) \mid \mathcal{G}_{\tau+t_n}] \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\Gamma_i}(X_{\tau+t_i}) \mid \mathcal{G}_\tau\right] \\ &= \mathbb{E}\left[P(t_{n+1} - t_n, X_{\tau+t_n}, \Gamma_{n+1}) \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\Gamma_i}(X_{\tau+t_i}) \mid \mathcal{G}_\tau\right] \\ &= \int \dots \int P(t_{n+1} - t_n, y_n, \Gamma_{n+1}) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\Gamma_i}(y_i) P(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, dy_n) \dots P(t_1, X_\tau, dy_1) \\ &= \mathbb{P}_{X_\tau}[B]. \end{aligned}$$

Sei nun $\mathcal{A}$ die Klasse aller Menge B , für die die Proposition gilt. Es ist einfach zu sehen, dass $\mathcal{A}$ eine Dynkin-Klasse ist. Somit ist die Aussage bewiesen. $\square$

Hilfssatz 3.8. Sei X ein E -wertiger Markov Prozess mit Übergangskern $P(t, x, \Gamma)$. Für $f \in B(E)$ definieren wir

$$T(t)f(x) = \int f(y)P(t, x, dy) = \mathbb{E}_x[f(X_t)].$$

Dann ist $\{T(t)\}$ eine messbare Kontraktionshalbgruppe auf $B(E)$.

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass $T(0)f(x) = f(x)$, das heisst, $T(0) = I$. Für $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned} T(t+s)f(x) &= \int f(y)P(t+s, x, dy) = \int f(y) \int P(t, z, dy)P(s, x, dz) \\ &= \int T(t)f(z)P(s, x, dz) = T(s)T(t)f(x) \end{aligned}$$

und $T(t+s) = T(s)T(t)$ folgt. Schliesslich ist

$$\|T(t)f(x)\| \leq \int \|f\|P(t, x, dy) = \|f\| ,$$

und $\|T(t)\| \leq 1$ folgt. Dass die Halbgruppe wirklich messbar ist, wollen wir hier nicht zeigen. $\square$

Proposition 3.9. Sei E separabel. Sei X ein E -wertiger Markov Prozess mit Anfangsverteilung ν und zugehöriger Halbgruppe $\{T(t)\}$ auf einem abgeschlossenen Unterraum $L \subset B(E)$. Ist L trennend, dann bestimmen $\{T(t)\}$ und ν die endlichen-dimensionalen Verteilungen von X .

Beweis. Für $f \in L$ und $t \geq 0$ haben wir

$$\begin{aligned} \int f(y)\mathbb{P}[X_t \in dy] &= \mathbb{E}[f(X_t)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_0^X]] \\ &= \mathbb{E}[T(t)f(X_0)] = \int T(t)f(x)\nu(dx) . \end{aligned}$$

Da L trennend ist, ist $\mathbb{P}[X_t \in \Gamma] = \nu_t(\Gamma)$ bestimmt.

Nehmen wir jetzt an, dass die n -dimensionale Verteilung durch

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i})\right] = \int \cdots \int \prod_{i=1}^n f_i(y_i)\nu_{t_1, \dots, t_n}(dy_1, \dots, dy_n)$$

bestimmt ist. Wegen der Markov Eigenschaft haben wir

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n+1} f_i(X_{t_i})\right] = \int \cdots \int T(t_{n+1} - t_n)f_{n+1}(y_n) \prod_{i=1}^n f_i(y_i)\nu_{t_1, \dots, t_n}(dy_1, \dots, dy_n) .$$

Die Aussage folgt dann aus Proposition 2.21. $\square$

Proposition 3.10. Sei X ein E -wertiger Markov Prozess mit dem Übergangskern $P(t, x, \Gamma)$, Halbgruppe $\{T(t)\}$ und vollständigem Generator $\hat{A}$. Ist $(f, g) \in \hat{A}$, dann ist

$$M_t = f(X_t) - \int_0^t g(X_s) \, ds$$

ein Martingal.

Beweis. Seien $t, u \geq 0$. Aus der Definition des vollständigen Generators folgt, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{t+u} \mid \mathcal{F}_t^X] &= \mathbb{E}\left[f(X_{t+u}) - \int_t^{t+u} g(X_s) \, ds \mid \mathcal{F}_t^X\right] - \int_0^t g(X_s) \, ds \\ &= \int f(y) P(u, X_t, dy) - \int_t^{t+u} \int g(y) P(s-t, X_t, dy) \, ds - \int_0^t g(X_s) \, ds \\ &= T(u)f(X_t) - \int_0^u T(s)g(X_t) \, ds - \int_0^t g(X_s) \, ds \\ &= f(X_t) - \int_0^t g(X_s) \, ds = M_t. \end{aligned}$$

□

3.2. Markov Sprungprozesse und Feller Prozesse

Sei $\mu(x, \Gamma)$ ein stochastischer Kern, $\lambda \in B(E)$ eine positive beschränkte Funktion und ν ein Wahrscheinlichkeitsmass auf E . Sei $\{Y_n\}$ eine homogene Markov Kette in diskreter Zeit mit Anfangsverteilung ν und Übergangskern μ : $\mathbb{P}[Y_0 \in \Gamma] = \nu(\Gamma)$ und $\mathbb{P}[Y_{n+1} \in \Gamma \mid Y_0, \dots, Y_n] = \mu(Y_n, \Gamma)$. Seien weiter $\{\tilde{T}_n\}$ iid $\text{Exp}(1)$ verteilte Zufallsvariablen unabhängig von $\{Y_i\}$. Wir definieren nun $T_{-1} = 0$ und $T_n = T_{n-1} + \tilde{T}_n/\lambda(Y_n)$. Dann ist

$$X_t = Y_k \quad \text{falls } T_{k-1} \leq t < T_k$$

ein Markov Prozess (Übung). Sei $f \in B(E)$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[f(X_t) \mid X_0 = x] = e^{-\lambda(x)t} f(x) + \int_0^t \int \mathbb{E}[f(X_{t-h}) \mid X_0 = y] \mu(x, dy) \lambda(x) e^{-\lambda(x)h} \, dh.$$

Subtrahieren wir $f(x)$, teilen durch t und lassen $t \downarrow 0$ gibt

$$\mathfrak{A}f(x) = \lambda(x) \int (f(y) - f(x)) \mu(x, dy).$$

Nehmen wir nun an, E sei lokal kompakt. Ist E nicht kompakt, so bezeichnen wir mit $\Delta \notin E$ einen Punkt, so dass $E \cup \{\Delta\}$ eine Kompaktifizierung von E ist. Ist E kompakt, so sei Δ ein isolierter Punkt. Dann ist $\mathbb{E}^\Delta = E \cup \{\Delta\}$ kompakt. Mit $\hat{C}(E)$ bezeichnen wir den Raum der stetigen Funktionen mit der Eigenschaft $\lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) = 0$.

Definition 3.11. Ein Operator B auf L heisst **positiv**, falls positive Funktionen auf positive Funktionen abgebildet werden. Eine Halbgruppe $\{T(t)\}$ heisst **positiv**, falls für alle $t \geq 0$ der Operator $T(t)$ positiv ist. Ein Operator A erfüllt das **positive Maximumsprinzip**, falls für alle $f \in \mathcal{D}(A)$ und $x_0 \in E$ für die $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in E\} \geq 0$ gilt, folgt dass $Af(x_0) \leq 0$.

Hilfssatz 3.12. Sei E lokal kompakt. Ein linearer Operator A auf $\hat{C}(E)$, der das positive Maximumsprinzip erfüllt, ist dissipativ.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{D}(A)$. Dann existiert ein $x_0 \in E$, so dass $|f(x_0)| = \|f\|$. Nehmen wir $f(x_0) \geq 0$ an, (ansonsten betrachten wir $-f$). Dann ist $\sup f(x) = f(x_0) \geq 0$ und damit $Af(x_0) \leq 0$. Also folgt für $\lambda > 0$

$$\|\lambda f - Af\| \geq \lambda f(x_0) - Af(x_0) \geq \lambda f(x_0) = \lambda \|f\|.$$

□

Satz 3.13. Sei E lokal kompakt. Der Abschluss $\bar{A}$ eines linearen Operators A auf $\hat{C}(E)$ ist einwertig und erzeugt eine stark stetige positive Kontraktionshalbgruppe $\{T(t)\}$ auf $\hat{C}(E)$, genau dann wenn:

- i) $\mathcal{D}(A)$ ist dicht in $\hat{C}(E)$,
- ii) A erfüllt das positive Maximumsprinzip und
- iii) $\mathcal{R}(\lambda - A)$ ist dicht in $\hat{C}(E)$ für ein $\lambda > 0$.

Beweis. Erzeugt $\bar{A}$ die Halbgruppe, so gelten die Bedingungen aus Satz 1.26. Wir müssen noch zeigen, dass A das positive Maximumsprinzip erfüllt. Sei $f \in \mathcal{D}(A)$, x_0 ein Punkt, wo f das Maximum annimmt. Dann ist $f(x_0) \geq 0$. Da $T(t)$ positiv ist, haben wir

$$T(t)f(x_0) \leq T(t)f^+(x_0) \leq \|f^+\| = f(x_0).$$

Aus der Definition des Generators folgt, dass $Af(x_0) \leq 0$.

Erfüllt A die Bedingungen, so ist A dissipativ (Hilfssatz 3.12). Somit folgt aus Satz 1.26, dass es eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe $\{T(t)\}$ mit Generator $\bar{A}$ gibt. Wir müssen noch zeigen, dass $\{T(t)\}$ positiv ist. Sei $f \in \mathcal{D}(\bar{A})$ und $\lambda > 0$ und nehmen wir an, dass $\inf f(x) < 0$. Wählen wir $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(A)$, so dass $(\lambda - A)f_n \rightarrow (\lambda - \bar{A})f$. Da $\bar{A}$ dissipativ ist, gilt $f_n \rightarrow f$. Sei x_n ein Punkt, an dem f_n das Minimum annimmt, und x_0 ein Punkt, wo f das Minimum annimmt. Dann gilt $f_n(x_n) \rightarrow f(x_0) < 0$, und aus dem positiven Maximumsprinzip folgt, dass $Af_n(x_n) \geq 0$ für alle n gross genug. Dann erhalten wir

$$\inf_{x \in E} \{(\lambda - \bar{A})f(x)\} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\lambda - A)f_n(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda f_n(x_n) = \lambda f(x_0) < 0.$$

Wir haben also gezeigt, dass aus $(\lambda - \bar{A})f \geq 0$ folgt, dass $f \geq 0$. Die Positivität folgt nun aus Korollar 1.23. $\square$

Definition 3.14. Ein Operator $A \subset B(E)^2$ heisst **konservativ**, falls es eine Folge $\{(f_n, g_n)\} \subset A$ gibt, so dass $\|f_n\| + \|g_n\|$ beschränkt ist, $f_n(x) \rightarrow 1$ und $g_n(x) \rightarrow 0$ für alle $x \in E$. Eine stark stetige positive Kontraktionshalbgruppe heisst **Feller Halbgruppe**, falls der Generator konservativ ist. Ein Markov Prozess, dessen Halbgruppe eine Feller Halbgruppe ist, heisst **Feller Prozess**.

Hilfssatz 3.15. Sei E lokal kompakt und separabel. Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige positive Kontraktionshalbgruppe auf $\hat{C}(E)$. Definieren wir $T^\Delta(t)$ auf $C(\mathbb{E}^\Delta)$ durch

$$T^\Delta(t)f = f(\Delta) + T(t)(f - f(\Delta)).$$

Dann ist $\{T^\Delta(t)\}$ eine Feller Halbgruppe auf $C(\mathbb{E}^\Delta)$.

Beweis. Es folgt sofort, dass $\{T^\Delta(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe ist. Sei $f \in \hat{C}(E)$ und $\alpha > 0$, so dass $\alpha + f \geq 0$. Dann ist $\|f^-\| \leq \alpha$. Da $f^- + f = f^+ \geq 0$, erhalten wir $-T(t)f \leq T(t)f^-$, insbesondere $(T(t)f)^- \leq T(t)f^-$. Weiter gilt $\|(T(t)f)^-\| \leq \|T(t)f^-\| \leq \|f^-\| \leq \alpha$. Also $(T(t)f)^- \leq \alpha$ und $\alpha + T(t)f \geq 0$. Somit ist $\{T^\Delta(t)\}$ positiv. Insbesondere gilt $|T^\Delta(t)f| \leq T^\Delta(t)\|f\| = \|f\|$. Also ist $\{T^\Delta(t)\}$ eine Kontraktionshalbgruppe. Schliesslich gilt $T^\Delta(t)1 = 1$, und damit ist $\mathfrak{A}^\Delta 1 = 0$. $\square$

Proposition 3.16. Sei E lokal kompakt und separabel. Sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige positive Kontraktionshalbgruppe auf $\hat{C}(E)$ und $\{T^\Delta(t)\}$ wie im Hilfssatz 3.15. Sei X ein Markov Prozess mit Halbgruppe $\{T^\Delta(t)\}$ auf $C(E^\Delta)$ mit Pfaden in $D_{\mathbb{E}^\Delta}[0, \infty)$. Wir definieren $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t = \Delta \text{ oder } X_{t-} = \Delta\}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[\tau < \infty, X_{\tau+s} = \Delta \text{ für alle } s \geq 0] = \mathbb{P}[\tau < \infty].$$

Sei $\mathfrak{A}$ der Generator von $\{T(t)\}$ und nehmen wir an, $\mathfrak{A}$ sei konservativ. Falls $\mathbb{P}[X_0 \in E] = 1$, dann gilt $\mathbb{P}[X \in D_E[0, \infty)] = 1$.

Beweis. Es gibt eine Funktion $g \in C(\mathbb{E}^\Delta)$ mit $g(x) > 0$ auf E und $g(\Delta) = 0$. Sei $f = \int_0^\infty e^{-u} T^\Delta(u) g \, du$. Nach Korollar 1.5 ist $T^\Delta(t)g(x)$ stetig in t . Also haben wir für jedes $x \in E$, dass $T^\Delta(t)g(x) > 0$ für t klein genug. Weiter gilt $T^\Delta(t)g(x) \geq 0$. Somit ist $f(x) > 0$. Aus der Definition von $\{T^\Delta(t)\}$ folgt, dass $T^\Delta(t)g(\Delta) = 0$. Somit ist für $t > s$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-t} f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] &= e^{-t} T^\Delta(t-s) f(X_s) = e^{-t} T^\Delta(t-s) \int_0^\infty e^{-u} T^\Delta(u) g(X_s) \, du \\ &= e^{-s} \int_0^\infty e^{-(t-s+u)} T^\Delta(t-s+u) g(X_s) \, du \\ &\leq e^{-s} \int_0^\infty e^{-u} T^\Delta(u) g(X_s) \, du = e^{-s} f(X_s). \end{aligned}$$

Somit ist $\{e^{-t} f(X_t)\}$ ein positives Supermartingal. Da $\tau = \inf\{t \geq 0 : e^{-t} f(X_t) = 0 \text{ oder } e^{-t} f(X_{t-}) = 0\}$, folgt $f(X_{\tau+t}) = 0$ für $t \geq 0$ auf der Menge $\{\tau < \infty\}$.

Aus der Definition von $\{T^\Delta(t)\}$ folgt sofort, dass $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}^\Delta$. Ist $\mathfrak{A}$ konservativ, dann gibt es eine Folge $\{(f_n, g_n)\} \subset \mathfrak{A}^\Delta$, so dass $\|f_n\| + \|g_n\|$ beschränkt ist, und $f_n \rightarrow \mathbb{I}_E$ und $g_n \rightarrow 0$ (punktweise). Nach Proposition 3.10 gilt

$$\mathbb{E}[f_n(X_t)] = \mathbb{E}[f_n(X_0)] + \mathbb{E}\left[\int_0^t g_n(X_s) \, ds\right].$$

Lassen wir $n \rightarrow \infty$, so folgt $\mathbb{P}[X_t \in E] = \mathbb{P}[X_0 \in E]$. Daher gilt

$$\mathbb{P}[X \in D_E[0, \infty)] = \mathbb{P}[\tau = \infty] = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\tau > t] = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_t \in E] = \mathbb{P}[X_0 \in E].$$

□

Satz 3.17. Sei E lokal kompakt und separabel. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\{T_n(t)\}$ eine Feller Halbgruppe auf $\hat{C}(E)$. Sei X_n ein Markov Prozess mit Halbgruppe $\{T_n(t)\}$ und Pfaden in $D_E[0, \infty)$. Sei $\{T(t)\}$ eine Feller Halbgruppe auf $\hat{C}(E)$, so dass für jedes

$f \in \hat{C}(E)$ und $t \geq 0$ gilt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t)f = T(t)f$. Nehmen wir an, dass $\{X_n(0)\}$ die Grenzwertverteilung $\nu \in \mathcal{P}(E)$ hat. Dann gibt es einen Markov Prozess X mit Halbgruppe $\{T(t)\}$, Anfangsverteilung ν und Pfaden in $D_E[0, \infty)$. Weiter gilt $X_n \Rightarrow X$.

Beweis. Sei $\mathfrak{A}_n$ der Generator von $\{T_n(t)\}$ und $\mathfrak{A}$ der Generator von $\{T(t)\}$. Nach Satz 1.34 gibt es für jedes $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ eine Folge $f_n \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}_n)$, so dass $f_n \rightarrow f$ und $\mathfrak{A}_n f_n \rightarrow \mathfrak{A}f$. Sann ist $\{f_n(X_n(t)) - \int_0^t \mathfrak{A}_n f_n(X_n(s)) ds\}$ ein $\{\mathcal{F}_t^{X_n}\}$ -Martingal (Proposition 3.10). Da $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ dicht ist in $\hat{C}(E)$ (Satz 3.13) folgt aus Satz 2.42, dass $\{f \circ X_n\}$ relativ kompakt ist in $D_{\mathbb{R}}[0, \infty)$. Nach Korollar 2.41 ist $\{X_n\}$ relativ kompakt in $D_{\mathbb{E}^\Delta}[0, \infty)$.

Wir definieren die Halbgruppen $\{T_n^\Delta(t)\}$ und $\{T^\Delta(t)\}$ wie in Hilfssatz 3.15. Für $f \in C(E^\Delta)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X_n(t))] &= \mathbb{E}[T_n^\Delta(t)f(X_n(0))] \\ &= \mathbb{E}[(T_n^\Delta(t) - T^\Delta(t))f(X_n(0))] + \mathbb{E}[T^\Delta(t)f(X_n(0))] . \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert die rechte Seite nach $\int T^\Delta(t)f(x) d\nu(x)$. Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nehmen wir an, dass der Grenzwert von $\mathbb{E}[f_1(X_n(t_1)) \cdots f_m(X_n(t_m))]$ für alle $f_1, \dots, f_m \in C(\mathbb{E}^\Delta)$ und $0 \leq t_1 < \dots < t_m$ existiert. Sei $f_{m+1} \in C(E^\Delta)$ und $t_{m+1} > t_m$. Dann erhalten wir wie für $m = 0$, dass

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f_1(X_n(t_1)) \cdots f_m(X_n(t_m))f_{m+1}(X_n(t_{m+1}))] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f_1(X_n(t_1)) \cdots f_m(X_n(t_m))T_n^\Delta(t_{m+1} - t_m)f_{m+1}(X_n(t_m))] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f_1(X_n(t_1)) \cdots f_m(X_n(t_m))T^\Delta(t_{m+1} - t_m)f_{m+1}(X_n(t_m))] \quad (3.2) \end{aligned}$$

existiert. Insbesondere sehen wir, dass jede konvergente Teilfolge den gleichen Grenzwert hat. Somit existiert X mit Pfaden in $D_{E^\Delta}[0, \infty)$, Anfangsverteilung ν , so dass $X_n \Rightarrow X$. Aus (3.2) folgt, dass X ein Markov Prozess mit Halbgruppe $\{T^\Delta(t)\}$ ist. Nach Proposition 3.16 hat X Pfade in $D_E[0, \infty)$. Schliesslich ergibt Korollar 2.41, dass $X_n \Rightarrow X$ in $D_E[0, \infty)$. $\square$

Satz 3.18. Sei E lokal kompakt und separabel. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mu_n(x, \Gamma)$ ein stochastischer Kern, so dass $T_n f(x) = \int f(y) \mu_n(x, dy) \hat{C}(E)$ in sich selbst abbildet. Sei $\{T(t)\}$ eine Feller Halbgruppe auf $\hat{C}(E)$. Nehmen wir an, die Folge $\varepsilon_n > 0$ erfüllt $\lim \varepsilon_n = 0$, und für jedes $f \in \hat{C}(E)$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{[t/\varepsilon_n]} f = T(t)f$$

für $t \geq 0$. Für jedes n sei $\{Y_n(k) : k \in \mathbb{N}\}$ eine Markov Kette mit Übergangskern $\mu_n(x, \Gamma)$ und $Y_n(0)$ hat die Grenzverteilung $\nu \in \mathcal{P}(E)$. Wir definieren X_n durch $X_n(t) = Y_n(\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor)$. Dann existiert ein Markov Prozess X mit Halbgruppe $\{T(t)\}$, Anfangsverteilung ν und Pfaden in $D_E[0, \infty)$, und $X_n \Rightarrow X$.

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 3.17, aber mit Hilfe von Satz 1.36 statt Satz 1.34. $\square$

Satz 3.19. Sei E lokal kompakt und separabel und sei $\{T(t)\}$ eine Feller Halbgruppe auf $\hat{C}(E)$. Dann existiert für jedes Mass $\nu \in \mathcal{P}(E)$ ein Markov Prozess X mit Halbgruppe $\{T(t)\}$, Anfangsverteilung ν und Pfaden in $D_E[0, \infty)$. Der Prozess X ist weiter stark Markov bezüglich der Filtration $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t+}^X$.

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ der Generator von $\{T(t)\}$ und für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei

$$\mathfrak{A}_n = n\mathfrak{A}(n - \mathfrak{A})^{-1} = n(n(n - \mathfrak{A})^{-1} - I)$$

die Yosida Approximation von $\mathfrak{A}$. Sei $f \in \hat{C}(E)$ und x_0 so gewählt, dass $f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in E\}$. Nehmen wir $f(x_0) < 0$ an. Da $\mathfrak{A}$ das positive Maximumsprinzip erfüllt (Satz 3.13), gilt $(\lambda - \mathfrak{A})f(x_0) \leq \lambda f(x_0) < 0$ für alle $\lambda > 0$. Somit ist $(\lambda - \mathfrak{A})$, und damit auch $(\lambda - \mathfrak{A})^{-1}$, ein positiver Operator. Dann ist $n(n - \mathfrak{A})^{-1}$ eine positive Kontraktion auf $\hat{C}(E)$, da $\mathfrak{A}$ dissipativ ist (Hilfssatz 3.12). Also gibt es für jedes $x \in E$ ein positives Borel Mass $\mu_n(x, \Gamma)$, so dass

$$n(n - \mathfrak{A})^{-1}f(x) = \int f(y) \mu_n(x, dy)$$

für alle $f \in \hat{C}(E)$. Da die Indikatorfunktion $\mathbb{I}_\Gamma$ durch Funktionen in $\hat{C}(E)$ approximiert werden kann, ist $\mu_n(x, \Gamma)$ Borel-messbar in x für jedes $\Gamma \in \mathfrak{B}(E)$. Für jedes $(f, g) \in \mathfrak{A}$ haben wir

$$f(x) = \int (f(y) - n^{-1}g) \mu_n(x, dy)$$

für alle $x \in E$. Da $\mathfrak{A}$ konservativ ist, gibt es eine Folge $\{(f_m, g_m)\} \subset \mathfrak{A}$, so dass $f_m \rightarrow 1$ und $g_m \rightarrow 0$ (punktweise und beschränkt). Beschränkte Konvergenz ergibt $1 = \int \mu_n(x, dy)$. Daher ist $\mu_n(x, \Gamma)$ ein stochastischer Kern. Somit gibt es einen Markov Sprungprozess mit Halbgruppe $\{T_n(t)\}$ auf $\hat{C}(E)$, Generator $\mathfrak{A}_n$, Anfangsverteilung ν und Pfaden in $D_E[0, \infty)$. Nach Proposition 1.22 haben wir $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t)f = T(t)f$ für jedes $f \in \hat{C}(E)$ und $t \geq 0$. Somit existiert X nach Satz 3.17.

Sei τ eine endliche diskrete $\{\mathcal{G}_t\}$ -Stopppzeit, die Werte in $\{t_1, t_2, \dots\}$ annimmt. Sei $A \in \mathcal{G}_\tau$ und $s > 0$. Dann ist $A \cap \{\tau = t_i\} \in \mathcal{F}_{t_i+\varepsilon}^X$ für alle $\varepsilon > 0$, und

$$\int_{A \cap \{\tau=t_i\}} f(X_{\tau+s}) \, d\mathbb{P} = \int_{A \cap \{\tau=t_i\}} f(X_{t_i+s}) \, d\mathbb{P} = \int_{A \cap \{\tau=t_i\}} T(s-\varepsilon)f(X_{t_i+\varepsilon}) \, d\mathbb{P}$$

für jedes $0 < \varepsilon \leq s$. Da $\{T(t)\}$ stark stetig ist, $T(s)f$ stetig ist auf E und X rechtsstetige Pfade hat, ist die obige Formel auf für $\varepsilon = 0$ korrekt. Somit haben wir

$$\mathbb{E}[f(X_{\tau+s}) \mid \mathcal{G}_\tau] = T(s)f(X_\tau)$$

für diskrete endliche Stopppzeiten τ .

Ist τ eine beliebige endliche Stopppzeit, dann gibt es eine fallende Folge von diskreten Stopppzeiten $\{\tau_n\}$, die nach τ konvergiert. Also haben wir

$$\mathbb{E}[f(X_{\tau_n+s}) \mid \mathcal{G}_\tau] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_{\tau_n+s}) \mid \mathcal{G}_{\tau_n}] \mid \mathcal{G}_\tau] = \mathbb{E}[T(s)f(X_{\tau_n}) \mid \mathcal{G}_\tau].$$

Da $T(s)f$ und f stetig sind und X rechtsstetige Pfade hat, folgt die Aussage, wenn wir n nach Unendlich gehen lassen. $\square$

Korollar 3.20. *Sei E lokal kompakt und separabel. Sei A ein linearer Operator of $\hat{C}(E)$, der die Bedingungen i)–iii) des Satzes 3.13 erfüllt, und sei $\{T(t)\}$ die stark stetige positive Kontraktionshalbgruppe auf $\hat{C}(E)$, die durch $\bar{A}$ erzeugt wird. Dann existiert genau dann für jedes $x \in E$ ein Markov Prozess X_x mit Halbgruppe $\{T(t)\}$, Anfangsverteilung δ_x und Pfaden in $D_E[0, \infty)$, falls A konservativ ist.*

Beweis. Ist A konservativ, dann folgt die Aussage aus Satz 3.19. Nehmen wir nun an, dass X_x für alle x existiert. Dann gibt es eine beschränkte Folge $\{g_n\} \subset \mathcal{R}(I-A)$, so dass $g_n(x) \rightarrow 1$ für jedes $x \in E$. Wir setzen $f_n = (I-A)^{-1}g_n \in \mathcal{D}(A)$. Da A dissipativ ist (Hilfssatz 3.12), ist die Folge $\{f_n\}$ beschränkt. Dann haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-t} g_n(X_x(t)) \, dt \right] = 1.$$

Also konvergiert $f_n(x) \rightarrow 1$ punktweise und $\lim_{n \rightarrow \infty} A f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - g_n(x)) = 0$. Also ist A konservativ. $\square$

Als nächstes wollen wir ein Kriterium beweisen, wann der konstruierte Markov Prozess stetige Pfade hat. Wir bezeichnen mit $C_E[0, \infty)$ den Raum der beschränkten stetigen Funktionen.

Proposition 3.21. Sei E lokal kompakt und separabel und $\{T(t)\}$ eine Feller Halbgruppe auf $\hat{C}(E)$. Sei $P(t, x, \Gamma)$ der Übergangskern, der zu $\{T(t)\}$ gehört, und nehmen wir an, dass für jedes $x \in E$ und $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} P(t, x, B(x, \varepsilon)^c) = 0. \quad (3.3)$$

Dann hat der Prozess X aus Satz 3.19 (fast sicher) stetige Pfade.

Bemerkung. Sei $\mathfrak{A}$ der Generator einer Feller Halbgruppe $\{T(t)\}$ auf $\hat{C}(E)$ mit Übergangskern $P(t, x, \Gamma)$. Nehmen wir an, dass es für jedes $x \in E$ und $\varepsilon > 0$ ein $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ gibt, so dass $f(x) = \|f\|$, $\sup\{f(y) : y \in B(x, \varepsilon)^c\} = M < \|f\|$ und $\mathfrak{A}f(x) = 0$. Dann gilt

$$(\|f\| - M)P(t, x, B(x, \varepsilon)^c) \leq \mathbb{E}_x[f(x) - f(X_t)] = - \int_0^t T(s)\mathfrak{A}f(x) \, ds.$$

Teilen wir durch t und lassen $t \downarrow 0$, so folgt (3.3). Die Bedingung ist also insbesondere für die Brownsche Bewegung erfüllt, wo $\mathfrak{A}f(x) = \frac{1}{2}f''(x)$ für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f \in \hat{C}(\mathbb{R})$ mit $f'' \in \hat{C}(\mathbb{R})$. ■

Beweis. Sei $x \in E$, $t \geq 0$ und $\varepsilon > 0$, so dass es ein $z \in E$ mit $r(x, y) \geq \varepsilon$ gibt. Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es eine positive Funktion $f_n \in \hat{C}(E)$, so dass $\|f_n\| = 1$, $f_n(z) = 1$, falls $r(x, z) \leq \varepsilon/2$, und $f_n(z) = 0$, falls $r(x, z) \geq \varepsilon/2 + n^{-1}$. Also gilt

$$P(t, y, B(x, \varepsilon/2 + n^{-1})) \geq T(t)f_n(y) \rightarrow T(t)f_n(x) \geq P(t, x, B(x, \varepsilon/2))$$

für $y \rightarrow x$, und damit

$$\lim_{y \rightarrow x} P(t, y, B(x, \varepsilon/2 + n^{-1})) \geq P(t, x, B(x, \varepsilon/2)).$$

Daher gilt

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow x} P(t, y, B(y, \varepsilon)^c) \leq \overline{\lim}_{y \rightarrow x} P(t, y, B(x, 2\varepsilon/3)^c) \leq P(t, x, B(x, \varepsilon/2)^c). \quad (3.4)$$

Für jedes $\delta > 0$ gibt es ein $t(x, \delta) \leq \delta$, so dass für $t = t(x, \delta)$ die rechte Seite von (3.4) kleiner als $\delta t(x, \delta)$ ist. Es gibt eine Umgebung U_x von x , so dass für jedes $y \in U_x$ die Ungleichung

$$P(t(x, \delta), y, B(y, \varepsilon)^c) \leq 2\delta t(x, \delta)$$

gilt. Da jede kompakte Untermenge von E mit endlich vielen U_x überdeckt werden kann, können wir eine Borel-messbare Funktion $s(y, \delta) \leq \delta$ definieren, so dass

$$P(s(y, \delta), y, B(y, \varepsilon)^c) \leq 2\delta s(y, \delta),$$

und so dass für jede kompakte Menge $K \subset E$ gilt, dass $\inf\{s(y, \delta) : y \in K\} > 0$. Definieren wir $\tau_0 = 0$ und $\tau_{k+1} = \tau_k + s(X_{\tau_k}, \delta)$. Dann folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty$, da $\{X_s : s \leq t\}$ für jedes $t \geq 0$ einen kompakten Abschluss hat. Sei

$$N_\delta(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{r(X(\tau_{k+1}), X(\tau_k)) \geq \varepsilon\}}.$$

Dann ist der Prozess

$$M_\delta(n) = N_\delta(n) - \sum_{k=0}^{n-1} P(s(X_{\tau_k}, \delta), X_{\tau_k}, B(X_{\tau_k}, \varepsilon)^c)$$

ein Martingal. Sei $K \subset E$ kompakt und $T > 0$. Wir definieren die Stoppzeit

$$\gamma_\delta = \min\{n : N_\delta(n) = 1, \tau_n > T \text{ oder } X(\tau_n) \notin K\}.$$

Aus dem Stoppsatz folgt dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_\delta(\gamma_\delta)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\gamma_\delta-1} P(s(X_{\tau_k}, \delta), X_{\tau_k}, B(X_{\tau_k}, \varepsilon)^c)\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\gamma_\delta-1} 2\delta s(X_{\tau_k}, \delta)\right] = 2\delta \mathbb{E}[\tau_{\gamma_\delta}] \leq 2\delta(T + \delta). \end{aligned}$$

Auf der Menge, auf der X einen Sprung grösser als ε vor dem Zeitpunkt T und vor dem Verlassen der Menge K hat, haben wir $\lim_{\delta \rightarrow 0} N_\delta(\gamma_\delta) = 1$. Also folgt, dass dieses Ereignis die Wahrscheinlichkeit 0 hat. Da ε , T und K beliebig waren, ist das Resultat bewiesen. $\square$

Satz 3.22. Seien $E, E_1, E_2, \dots$ metrische Räume, wobei E lokal kompakt und separabel ist. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\eta_n : E_n \rightarrow E$ messbar und $\{T_n(t)\}$ sei eine Halbgruppe auf $B(E_n)$, die von einem Übergangskern erzeugt wird, und Y_n sei ein Markov Prozess auf E_n mit Halbgruppe $\{T_n(t)\}$. Nehmen wir an, $X_n = \eta_n \circ Y_n$ habe Pfade in $D_E[0, \infty)$. Sei $\pi_n : B(E) \rightarrow B(E_n)$ definiert durch $\pi_n f = f \circ \eta_n$. Sei $\{T(t)\}$ eine Feller Halbgruppe auf $\hat{C}(E)$. Nehmen wir an, dass für jedes $f \in \hat{C}(E)$ und $t \geq 0$, $T_n(t)\pi_n f \rightarrow T(t)f$ (mit der Definition aus Abschnitt 1.6). Falls $\{X_n(0)\}$ eine Grenzverteilung $\nu \in \mathcal{P}(E)$ hat, dann gibt es einen Markov Prozess X mit Halbgruppe $\{T(t)\}$, Anfangsverteilung ν und Pfaden in $D_E[0, \infty)$, und $X_n \Rightarrow X$.

Beweis. Wir haben

$$\mathbb{E}[f(X_n(t+s)) \mid \mathcal{F}_t^{Y_n}] = T_n(s)\pi_n f(Y_n) \approx \pi_n T(s)f(\eta_n(Y_n(s))) = T(s)f(X_n(s)).$$

Mit dieser Beobachtung können wir das Resultat analog dem Beweis von Satz 3.17 beweisen. $\square$

Satz 3.23. Seien $E, E_1, E_2, \dots$ metrische Räume, wobei E lokal kompakt und separabel sei. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $\eta_n : E_n \rightarrow E$ messbar, $\mu_n(x, \Gamma)$ ein stochastischer Kern auf $E_n \times \mathfrak{B}(E_n)$. Nehmen wir an, dass Y_n eine Markov Kette auf E_n mit Übergangskern $\mu_n(x, \Gamma)$ ist. Sei $\varepsilon_n > 0$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Definieren wir $X_n(t) = \eta_n(Y_n(\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor))$, $T_n f(x) = \int f(y) \mu_n(x, dy)$ für $f \in B(E_n)$ und $\pi_n : B(E) \rightarrow B(E_n)$ über $\pi_n f = f \circ \eta_n$. Sei $\{T(t)\}$ eine Feller Halbgruppe auf $\hat{C}(E)$, und für jedes $t \geq 0$ soll $T_n^{\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor} \pi_n f \rightarrow T(t)f$ gelten. Hat $\{X_n(0)\}$ eine Grenzverteilung ν , so gibt es einen Markov Prozess X mit Halbgruppe $\{T(t)\}$, Anfangsverteilung ν und Pfaden in $D_E[0, \infty)$, und $X_n \Rightarrow X$.

Beweis. Der Beweis folgt analog dem Beweis von Satz 3.22, wobei man aber Satz 3.18 anstelle von Satz 3.17 verwendet. $\square$

3.3. Das Martingalproblem: Allgemeines und Pfadeneigenschaften

Definition 3.24. Sei $A \subset (B(E))^2$ (nicht notwendigerweise linear). Ein messbarer E -wertiger stochastischer Prozess X , der auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert ist, heisst eine **Lösung des Martingalproblems für A** , falls für alle $(f, g) \in A$, der Prozess

$$\left\{ f(X_t) - \int_0^t g(X_s) \, ds \right\} \quad (3.5)$$

ein $\{*\mathcal{F}_t^X\}$ -Martingal ist, wobei

$$*\mathcal{F}_t^X = \mathcal{F}_t^X \vee \sigma\left(\int_0^s h(X_u) \, du : s \leq t, h \in B(E)\right).$$

Ist $\{\mathcal{G}_t\}$ eine Filtration mit $*\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{G}_t$ für alle $t \geq 0$, und (3.5) ist ein $\{\mathcal{G}_t\}$ -Martingal für alle $(f, g) \in A$, dann heisst X **Lösung des Martingalproblems für A bezüglich $\{\mathcal{G}_t\}$** . Ist eine Anfangsverteilung μ vorgegeben und X eine Lösung des Martingalproblems für A mit $\mathbb{P}[X_0 \in \Gamma] = \mu(\Gamma)$, dann sagen wir, X ist **eine Lösung des Martingalproblems für (A, μ)** .

Falls X rechtsstetig ist, dann gilt $*\mathcal{F}_t^X = \mathcal{F}_t^X$. Wir bemerken weiter, dass ein messbarer Prozess X genau dann eine Lösung des Martingalproblems für A ist, falls

$$\mathbb{E}\left[\left(f(X_{t_{n+1}}) - f(X_{t_n}) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(X_s) \, ds\right) \prod_{k=1}^n h_k(X_{t_k})\right] = 0 \quad (3.6)$$

für alle $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$, $(f, g) \in A$ und $h_1, \dots, h_n \in B(E)$ (oder äquivalent dazu in $\hat{C}(E)$). Für $A \subset (B(E))^2$ bezeichnen wir mit A_S den linearen Raum, der von A aufgespannt wird. Mit A_S^c bezeichnen wir den Raum der Funktionen, die als punktwiser Grenzwert einer Folge $\{(f_n, g_n)\}$ mit $\sup_n \|f_n\| + \|g_n\| < \infty$ erhalten werden können.

Proposition 3.25. Seien $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ zwei Teilmengen von $(B(E))^2$. Gilt nun $(A^{(1)})_S^c = (A^{(2)})_S^c$, dann ist X genau dann eine Lösung des Martingalproblems für $A^{(1)}$, wenn es eine Lösung des Martingalproblems für $A^{(2)}$ ist.

Beweis. Sei X eine Lösung des Martingalproblems für A . Bezeichnen wir mit $\tilde{A}$ die Menge aller Funktionenpaare, so dass (3.5) ein Martingal ist. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(f_i, g_i) \in \tilde{A}$ für $i \in \{1, 2, \dots\}$. Dann ist leicht zu sehen, dass $(\alpha f_1, \alpha g_1) \in \tilde{A}$ und $(f_1 + f_2, g_1 + g_2) \in \tilde{A}$. Nehmen wir an, die Folge $\{(f_n, g_n)\}$ ist beschränkt und konvergiert punktwise nach (f, g) . Beschränkte Konvergenz ergibt Konvergenz in (3.6), uns somit ist $(f, g) \in \tilde{A}$. Die Aussage folgt nun daraus, dass jede Lösung des Martingalproblems für A_S^c auch eine Lösung des Martingalproblems für A ist. $\square$

Hilfssatz 3.26. Seien X ein messbarer Prozess, $\mathcal{G}_t \supset \mathcal{F}_t$ und $f, g \in B(E)$. Dann ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ der Prozess (3.5) ein $\{\mathcal{G}_t\}$ -Martingal, genau dann wenn

$$\left\{ e^{-\lambda t} f(X_t) + \int_0^t e^{-\lambda s} (\lambda f(X_s) - g(X_s)) \, ds \right\} \quad (3.7)$$

ein $\{\mathcal{G}_t\}$ -Martingal ist. Ist $\inf\{f(x) : x \in E\} > 0$, dann ist (3.5) ein $\{\mathcal{G}_t\}$ -Martingal, genau dann wenn

$$\left\{ f(X_t) \exp \left\{ - \int_0^t \frac{g(X_s)}{f(X_s)} \, ds \right\} \right\} \quad (3.8)$$

ein $\{\mathcal{G}_t\}$ -Martingal ist.

Beweis. Sei M das $\{\mathcal{G}_t\}$ -Martingal (3.5). Dann erhalten wir aus dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda t} f(X_t) + \int_0^t e^{-\lambda s} (\lambda f(X_s) - g(X_s)) \, ds \\ &= e^{-\lambda t} f(X_t) + \int_0^t e^{-\lambda s} \lambda f(X_s) \, ds - \int_0^t \left(e^{-\lambda t} + \int_s^t \lambda e^{-\lambda u} \, du \right) g(X_s) \, ds \\ &= e^{-\lambda t} \left(f(X_t) - \int_0^t g(X_s) \, ds \right) + \int_0^t \left(f(X_s) - \int_0^s g(X_u) \, du \right) \lambda e^{-\lambda s} \, ds \\ &= e^{-\lambda t} M_t + \int_0^t M_s \lambda e^{-\lambda s} \, ds. \end{aligned}$$

Nehmen wir auf der rechten Seite den bedingten Erwartungswert, erhalten wir die Martingaleigenschaft. Die Umkehrung folgt durch die Betrachtung des Prozesses $\{(X_t, t)\}$ und das Ersetzen von λ durch $-\lambda$.

Der Prozess $\{\exp\{-\int_0^t g(X_s)(f(X_s))^{-1} ds\}\}$ ist von beschränkter Variation. Daher dürfen wir partielle Integration anwenden:

$$\begin{aligned}
& f(X_t) \exp\left\{-\int_0^t \frac{g(X_s)}{f(X_s)} ds\right\} \\
&= f(X_t) \exp\left\{-\int_0^t \frac{g(X_s)}{f(X_s)} ds\right\} - \int_0^t g(X_s) ds \exp\left\{-\int_0^t \frac{g(X_s)}{f(X_s)} ds\right\} \\
&\quad + \int_0^t g(X_s) \exp\left\{-\int_0^s \frac{g(X_u)}{f(X_u)} du\right\} ds \\
&\quad - \int_0^t \int_0^s g(X_u) du \frac{g(X_s)}{f(X_s)} \exp\left\{-\int_0^s \frac{g(X_u)}{f(X_u)} du\right\} ds \\
&= M_t \exp\left\{-\int_0^t \frac{g(X_s)}{f(X_s)} ds\right\} + \int_0^t M_s \frac{g(X_s)}{f(X_s)} \exp\left\{-\int_0^s \frac{g(X_u)}{f(X_u)} du\right\} ds \\
&= M_0 + \int_0^t \exp\left\{-\int_0^s \frac{g(X_u)}{f(X_u)} du\right\} dM_s.
\end{aligned}$$

Letzterer Ausdruck ist ein Martingal.

Sei $N_t = f(X_t) \exp\{-\int_0^t g(X_s)f(X_s)^{-1} ds\}$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
& f(X_t) - \int_0^t g(X_s) ds \\
&= \exp\left\{\int_0^t \frac{g(X_s)}{f(X_s)} ds\right\} f(X_t) \exp\left\{-\int_0^t \frac{g(X_s)}{f(X_s)} ds\right\} \\
&\quad - \int_0^t \frac{g(X_s)}{f(X_s)} \exp\left\{\int_0^s \frac{g(X_u)}{f(X_u)} du\right\} f(X_s) \exp\left\{-\int_0^s \frac{g(X_u)}{f(X_u)} du\right\} ds \\
&= \exp\left\{\int_0^t \frac{g(X_s)}{f(X_s)} ds\right\} N_t - \int_0^t N_s \frac{g(X_s)}{f(X_s)} \exp\left\{\int_0^s \frac{g(X_u)}{f(X_u)} du\right\} ds \\
&= N_0 + \int_0^t \exp\left\{\int_0^s \frac{g(X_u)}{f(X_u)} du\right\} dN_s.
\end{aligned}$$

Auch dies ist ein Martingal. □

Proposition 3.27. Sei A eine lineare Teilmenge von $(B(E))^2$, die $(1, 0)$ enthält. Wir definieren die Menge $A^+ = \{(f, g) \in A : \inf_x f(x) > 0\}$. Sei X ein messbarer E -wertiger Prozess und $\mathcal{G}_t \supset {}^*\mathcal{F}_t^X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) X ist eine Lösung des Martingalproblems für A bezüglich $\{\mathcal{G}_t\}$.

- ii) X ist eine Lösung des Martingalproblems für A^+ bezüglich $\{\mathcal{G}_t\}$.
- iii) Für jedes $(f, g) \in A$ ist (3.7) ein $\{\mathcal{G}_t\}$ -Martingal.
- iv) Für jedes $(f, g) \in A^+$ ist (3.8) ein $\{\mathcal{G}_t\}$ -Martingal.

Beweis. Ist $(f, g) \in A$, dann ist $(f + \|f\| + 1, g) \in A^+$. Somit ist $(A^+)_S = A$. Die Aussage folgt dann aus Proposition 3.25 und Hilfssatz 3.26. $\square$

Hilfssatz 3.28. Sei X ein messbarer stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in E . Seien $u, v : [0, \infty) \times E \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $w : [0, \infty)^2 \times E \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und messbar. Sei weiter $v(t, \cdot, \omega)$ stetig für jedes feste t, ω und die Prozesse $\{u(t, X_t)\}$, $\{v(t, X_t)\}$ und $\{w(t, t, X_t)\}$ seien adaptiert bezüglich einer Filtration $\{\mathcal{G}_t\}$. Nehmen wir an, dass i) oder ii) gelten:

- i) Für jedes $t_2 > t_1 \geq 0$ gilt

$$\mathbb{E}[u(t_2, X_{t_2}) - u(t_1, X_{t_1}) \mid \mathcal{G}_{t_1}] = \mathbb{E}\left[\int_{t_1}^{t_2} v(s, X_s) \, ds \mid \mathcal{G}_{t_1}\right]$$

und

$$\mathbb{E}[u(t_1, X_{t_2}) - u(t_1, X_{t_1}) \mid \mathcal{G}_{t_1}] = \mathbb{E}\left[\int_{t_1}^{t_2} w(t_1, s, X_s) \, ds \mid \mathcal{G}_{t_1}\right].$$

Weiter sei X rechtsstetig und

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \mathbb{E}[|w(t - \delta, t, X_t) - w(t, t, X_t)|] = 0, \quad t > 0.$$

- ii) Für $t_2 > t_1 \geq 0$ gilt

$$\mathbb{E}[u(t_2, X_{t_2}) - u(t_2, X_{t_1}) \mid \mathcal{G}_{t_1}] = \mathbb{E}\left[\int_{t_1}^{t_2} w(t_2, s, X_s) \, ds \mid \mathcal{G}_{t_1}\right]$$

und

$$\mathbb{E}[u(t_2, X_{t_1}) - u(t_1, X_{t_1}) \mid \mathcal{G}_{t_1}] = \mathbb{E}\left[\int_{t_1}^{t_2} v(s, X_{t_1}) \, ds \mid \mathcal{G}_{t_1}\right].$$

Weiter sei X linksstetig und

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \mathbb{E}[|w(t + \delta, t, X_t) - w(t, t, X_t)|] = 0, \quad t \geq 0.$$

Dann ist

$$u(t, X_t) - \int_0^t (v(s, X_s) + w(s, s, X_s)) \, ds$$

ein $\{\mathcal{G}_t\}$ -Martingal.

Beweis. Sei $t_2 > t_1 \geq 0$. Für jede Partition $t_1 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t_2$ erhalten wir unter i)

$$\mathbb{E}[u(t_2, X_{t_2}) - u(t_1, X_{t_1}) \mid \mathcal{G}_{t_1}] = \mathbb{E}\left[\int_{t_1}^{t_2} (v(s, X_{s''(s)}) + w(s'(s), s, X_s)) \, ds \mid \mathcal{G}_{t_1}\right]$$

und unter ii)

$$\mathbb{E}[u(t_2, X_{t_2}) - u(t_1, X_{t_1}) \mid \mathcal{G}_{t_1}] = \mathbb{E}\left[\int_{t_1}^{t_2} (v(s, X_{s'(s)}) + w(s''(s), s, X_s)) \, ds \mid \mathcal{G}_{t_1}\right],$$

wobei $s'(s) = s_k$ und $s''(s) = s_{k+1}$ für $s_k < s \leq s_{k+1}$. Lassen wir $\max |s_{k+1} - s_k| \rightarrow 0$, erhalten wir die Martingaleigenschaft. $\square$

Proposition 3.29. Sei A eine lineare Teilmenge von $(B(E))^2$. Falls es für jedes $x \in E$ eine Lösung X_x des Martingalproblems für (A, δ_x) gibt, dann ist A dissipativ.

Beweis. Für jedes $(f, g) \in A$ und $\lambda > 0$ schliessen wir aus Hilfssatz 3.26, dass

$$f(x) = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda t} f(X_x(t)) + \int_0^t e^{-\lambda s} [\lambda f(X_x(s)) - g(X_x(s))] \, ds\right].$$

Lassen wir $t \rightarrow \infty$, folgt

$$f(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda s} [\lambda f(X_x(s)) - g(X_x(s))] \, ds\right].$$

Also gilt

$$\|f\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda s} \|\lambda f - g\| \, ds = \lambda^{-1} \|\lambda f - g\|.$$

$\square$

Satz 3.30. Sei E separabel. Sei $A \subset \bar{C}(E) \times B(E)$, so dass $\mathcal{D}(A)$ trennend ist und eine abzählbare Teilmenge enthält, die die Punkte trennt. Sei X eine Lösung des Martingalproblems für A . Nehmen wir an, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ und $T > 0$ eine kompakte Menge $K_{\varepsilon, T}$ gibt, so dass

$$\mathbb{P}[X_t \in K_{\varepsilon, T} \, \forall t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}] > 1 - \varepsilon. \quad (3.9)$$

Dann gibt es eine Modifikation von X mit Pfaden in $D_E[0, \infty)$.

Beweis. Sei X auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definiert. Es gibt eine Folge $\{(f_i, g_i)\} \subset A$, so dass $\{f_i\}$ die Punkte in E trennt. Es gibt dann eine Menge $\Omega' \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}[\Omega'] = 1$, so dass

$$f_i(X_t) - \int_0^t g_i(X_s) \, ds$$

für den Grenzübergang über die rationalen Zahlen sowohl von oben als auch von unten konvergiert, und zwar für alle $t \geq 0$, i und $\omega \in \Omega'$ (siehe [1]). Aus (3.9) folgt, dass es ein $\Omega'' \subset \Omega'$ mit $\mathbb{P}[\Omega''] = 1$ gibt, so dass $\{X_t(\omega) : t \in [0, T] \cap \mathbb{Q}\}$ kompakten Träger hat für alle $T > 0$ und $\omega \in \Omega''$. Sei nun $\omega \in \Omega''$ und $t \geq 0$. Sei $\{s_n\} \subset \mathbb{Q}$ eine Folge, so dass $s_n > t$, $\lim_n s_n = t$ und $\lim_n X_{s_n}(\omega)$ existiert. Dann ist

$$f_i\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_{s_n}(\omega)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_i(X_{s_n}(\omega)) = \lim_{\substack{s \rightarrow t+ \\ s \in \mathbb{Q}}} f_i(X_s(\omega))$$

und, da $\{f_i\}$ die Punkte trennt, muss jede Folge $\{s_n\}$ den gleichen Grenzwert ergeben, das heisst

$$Y_t(\omega) = \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s(\omega)$$

existiert für alle $t \geq 0$ und $\omega \in \Omega''$. Ähnlich erhält man, dass

$$Y_t^-(\omega) = \lim_{\substack{s \rightarrow t- \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s(\omega)$$

für alle $t > 0$ und $\omega \in \Omega''$ existiert. Somit hat Y Pfade in $D_E[0, \infty)$.

Sei $f \in \mathcal{D}(A)$ und $t \geq 0$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(Y_t) \mid \mathcal{F}_t^X] &= \lim_{\substack{s \rightarrow t+ \\ s \in \mathbb{Q}}} \mathbb{E}[f(X_s) \mid \mathcal{F}_t^X] \\ &= f(X_t) + \lim_{\substack{s \rightarrow t+ \\ s \in \mathbb{Q}}} \mathbb{E}\left[\int_t^s g(X_u) \, du \mid \mathcal{F}_t^X\right] = f(X_t). \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Masse auf E^2 , die für $A, B \in \mathfrak{B}(E)$ durch

$$\mu(A \times B) = \mathbb{P}[X_t \in A \cap B], \quad \nu(A \times B) = \mathbb{P}[X_t \in A, Y_t \in B]$$

erzeugt werden. Dann ist $\int f(x)\tilde{f}(y)\mu(dx, dy) = \int f(x)\tilde{f}(y)\nu(dx, dy)$ für alle $f, \tilde{f} \in \mathcal{D}(A) \cup \{1\}$. Da $\mathcal{D}(A)$ trennend ist, folgt aus Proposition 2.21, dass $\mu = \nu$, und somit $\mathbb{P}[X_t = Y_t] = 1$. $\square$

Korollar 3.31. Sei E lokal kompakt und separabel. Sei $A \subset \hat{C}(E) \times B(E)$, so dass $\mathcal{D}(A)$ dicht ist in $\hat{C}(E)$. Dann hat jede Lösung des Martingalproblems für A eine Modifikation mit Pfaden in $D_{\mathbb{E}^\Delta}[0, \infty)$, wobei $\mathbb{E}^\Delta$ die Einpunkt-Kompaktifizierung von E ist.

Beweis. Sei

$$A' = \{(f, g) \in C(\mathbb{E}^\Delta) \times B(\mathbb{E}^\Delta) : f(\Delta) = g(\Delta) = 0, (f|_E, g|_E) \in A\} \cup \{(1, 0)\}$$

und $A'' = (A'_S)^c$. Jede Lösung des Martingalproblems für A , betrachtet als ein Prozess auf $\mathbb{E}^\Delta$, ist eine Lösung des Martingalproblems für A'' . Seien μ, ν zwei Wahrscheinlichkeitsmasse auf $\mathbb{E}^\Delta$, und nehmen wir $\int f d\mu = \int f d\nu$ für alle $f \in \mathcal{D}(A'')$ an. Dann gibt es eine beschränkte Folge $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(A)$, so dass $f_n \rightarrow \mathbb{1}_E$. Betrachten wir f_n als eine Funktion in $\mathcal{D}(A'')$. Wir erhalten dann $\nu(E) = \mu(E)$. Ist $\mu(E) = 0$, dann gilt $\nu = \mu$. Nehmen wir also $\mu(E) \neq 0$ an. Definieren wir die Masse $\mu^*(A) = \mu(A)/\mu(E)$ und $\nu^*(A) = \nu(A)/\nu(E)$ für $A \in \mathfrak{B}(E)$, so haben wir $\int f d\mu^* = \int f d\nu^*$ für jedes $f \in \mathcal{D}(A)$. Daher gilt $\mu|_{\mathfrak{B}(E)} = \nu|_{\mathfrak{B}(E)}$, woraus $\mu = \nu$ folgt.

Sei $\{x_n\} \subset E$ eine dichte Folge. Für jedes $n, m \in \mathbb{N}$ gibt es ein $g^{n,m} \in \hat{C}(E)$, so dass $g^{n,m}(x) = 1$ für $x \in B(x_n, m^{-1})$ und $g^{n,m}(x) = 0$ für $x \notin B(x_n, 2m^{-1})$. Es gibt weiter eine Folge $\{f_k^{n,m}\} \subset \mathcal{D}(A)$ (betrachtet als Funktionen in $\mathcal{D}(A'')$), die gegen $g^{n,m}$ konvergieren. Die Menge $\{f_k^{n,m} : k, n, m \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbar. Sei $x, y \in \mathbb{E}^\Delta$, $x \neq y$, wobei $x \in E$. Sei zuerst $y = \Delta$. Dann gibt es $n, m \in \mathbb{N}$, so dass $x \in B(x_n, m^{-1})$ und $r(x, \Delta) > m^{-1}$. Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $f_k^{n,m}(x) > 0$. Nach der Definition ist $f_k^{n,m}(\Delta) = 0$. Sei nun $y \in E$. Wählen wir $m > 3(r(x, y))^{-1}$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $x \in B(x_n, m^{-1})$. Wir haben weiter, dass $y \notin B(x_n, 2m^{-1})$. Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $f_k^{n,m}(x) > 1/2 > f_k^{n,m}(y)$. Somit gibt es eine abzählbare Teilmenge von $\mathcal{D}(A'')$, die die Punkte von $\mathbb{E}^\Delta$ trennt. Weiter ist $\mathbb{E}^\Delta$ kompakt, und (3.9) ist für $K_{\varepsilon, T} = E^\Delta$ erfüllt. Somit folgt die Behauptung aus Satz 3.30. $\square$

Satz 3.32. Sei $(\hat{E}, r)$ ein metrischer Raum und $A \subset B(\hat{E})^2$. Sei $E \subset \hat{E}$ offen, und X eine Lösung des Martingalproblems für A mit Pfaden in $D_{\hat{E}}[0, \infty)$. Nehmen wir an, dass es eine beschränkte Folge $\{(f_n, g_n)\} \in A \cap [\bar{C}(\hat{E}) \times B(\hat{E})]$ gibt, die punktweise nach $(\mathbb{1}_E, 0)$ konvergiert. Ist weiter $\mathbb{P}[X(0) \in E] = 1$, dann gilt $\mathbb{P}[X \in D_E[0, \infty)] = 1$.

Beweis. Für $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definieren wir die $\{\mathcal{F}_{t+}^X\}$ -Stoppzeit

$$\tau_m = \inf \left\{ t : \inf_{y \in \hat{E} \setminus E} r(y, X_t) < \frac{1}{m} \right\}.$$

Dann ist $\{\tau_i\}$ wachsend und $Y_t = \lim_m X_{\tau_m \wedge t}$ existiert. Sei $\tau = \lim_m \tau_m$. Wir bemerken, dass $Y_t \in \hat{E} \setminus E$ genau dann, wenn $\tau \leq t$. Für $(f, g) \in A \cap [\bar{C}(\hat{E}) \times B(\hat{E})]$ ist

$$\left\{ f(X_t) - \int_0^t g(X_s) \, ds \right\}$$

ein rechtsstetiges $\{\mathcal{F}_t^X\}$ -Martingal. Aus dem Stoppsatz folgt

$$\mathbb{E}[f(X_{\tau_m \wedge t})] = \mathbb{E}[f(X_0)] + \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_m \wedge t} g(X_s) \, ds\right].$$

Lassen wir $m \rightarrow \infty$, erhalten wir

$$\mathbb{E}[f(Y_t)] = \mathbb{E}[f(X_0)] + \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau \wedge t} g(X_s) \, ds\right]. \quad (3.10)$$

Wählen wir die Folge $\{(f_n, g_n)\} \subset A \cap (\bar{C}(\hat{E}) \times B(\hat{E}))$, die punktweise nach $(\mathbb{1}_E, 0)$ konvergiert, und lassen $n \rightarrow \infty$, erhalten wir

$$\mathbb{P}[\tau > t] = \mathbb{P}[Y_t \in E] = \mathbb{P}[Y_0 \in E] = 1.$$

Das heisst, mit Wahrscheinlichkeit 1 hat X keinen Grenzpunkt in $\hat{E} \setminus E$ auf beschränkten Intervallen. Somit hat X Pfade in $D_E[0, \infty)$. $\square$

Proposition 3.33. Seien $\hat{E}$, E , A und X wie in Satz 3.32. Nehmen wir an, dass es eine Folge $\{(f_n, g_n)\} \subset A \cap (\bar{C}(\hat{E}) \times B(\hat{E}))$ gibt, so dass $\{\|f_n\|\}$ beschränkt ist, $\lim_n f_n(x) = \mathbb{1}_E(x)$ punktweise, $\inf_n \inf_x g_n(x) > -\infty$ und $\lim_n g_n(x) = 0$ punktweise. Ist $\mathbb{P}[X_0 \in E] = 1$, dann gilt $\mathbb{P}[X \in \mathcal{D}_E[0, \infty)] = 1$.

Beweis. Wie im Beweise von Satz 3.32 gilt (3.10). Setzen wir (f_n, g_n) ein und lassen $n \rightarrow \infty$, folgt mit Hilfe des Lemmas von Fatou, dass

$$\mathbb{P}[\tau > t] = \mathbb{P}[Y_t \in E] \geq \mathbb{P}[Y_0 \in E] = 1.$$

Dies beweist die Behauptung. $\square$

Proposition 3.34. Seien $\hat{E}$, A und X wie im Satz 3.32. Seien $E_1, E_2, \dots$ offene Untermengen von $\hat{E}$ und $E = \bigcap_k E_k$. Nehmen wir an, es gibt eine beschränkte Folge $\{(f_n, g_n)\} \in A \cap (\bar{C}(\hat{E}) \times B(\hat{E}))$ die punktweise nach $(\mathbb{1}_E, 0)$ konvergiert. Ist $\mathbb{P}[X(0) \in E] = 1$, dann gilt $\mathbb{P}[X \in D_E[0, \infty)] = 1$.

Beweis. Seien $\tau_m^k = \inf\{t : \inf\{r(y, X_t) : y \in \hat{E} \setminus E_k\} < m^{-1}\}$. Es folgt wie im Beweis von Satz 3.32, dass

$$\mathbb{P}[\lim_m X_{\tau_m^k \wedge t} \in E_k] \geq \mathbb{P}[\lim_m X_{\tau_m^k \wedge t} \in E] = \mathbb{P}[X_0 \in E] = 1.$$

Somit hat X (f.s.) Pfade in $D_{E_k}[0, \infty)$ für jedes k . Dann sind die Pfade fast sicher in $D_E[0, \infty)$. $\square$

Satz 3.35. Sei E separabel. Sei $A \subset \bar{C}(E) \times B(E)$ und $\mathcal{D}(A)$ sei trennend. Sei X eine Lösung des Martingalproblems für A bezüglich $\{\mathcal{G}_t\}$ mit Pfaden in $\mathcal{D}_E[0, \infty)$. Sei $\{\tau_n\}$ eine wachsende Folge von $\{\mathcal{G}_t\}$ -Stoppzeiten und $\tau = \lim_n \tau_n$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[\lim_{n \rightarrow \infty} X_{\tau_n} = X_\tau, \tau < \infty] = \mathbb{P}[\tau < \infty].$$

Insbesondere gilt $\mathbb{P}[X_t = X_{t-}] = 1$ für jedes $t > 0$.

Beweis. Aus $\{\tau \leq t\} = \cap_n \{\tau_n \leq t\}$ folgt, dass τ eine $\{\mathcal{G}_t\}$ -Stoppzeit ist. Für $(f, g) \in A$ und $t \geq 0$ haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(X_{\tau_n \wedge t}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[f(X_{\tau \wedge t}) - \int_{\tau_n \wedge t}^{\tau \wedge t} g(X_s) \, ds \mid \mathcal{G}_{\tau_n}\right] = \mathbb{E}\left[f(X_{\tau \wedge t}) \mid \bigvee_n \mathcal{G}_{\tau_n}\right].$$

Wie im Beweis des Satzes 3.30 folgt nun, dass $\mathbb{P}[\lim_{n \rightarrow \infty} X_{\tau_n \wedge t} = X_{\tau \wedge t}] = 1$. Also gilt

$$\mathbb{P}[\lim_{n \rightarrow \infty} X_{\tau_n} = X_\tau, \tau \leq t] = 1 - \mathbb{P}[\lim_{n \rightarrow \infty} X_{\tau_n \wedge t} = X_t, \tau > t] = 1 - \mathbb{P}[\tau > t] = \mathbb{P}[\tau \leq t]$$

und die Behauptung folgt, wenn wir $t \rightarrow \infty$ lassen. $\square$

Korollar 3.36. Sei E separabel und nehmen wir an, dass A und X die Voraussetzungen von Satz 3.35 erfüllen. Sei $F \subset E$ abgeschlossen und $\tau = \inf\{t : X_t \in F \text{ oder } X_{t-} \in F\}$ und $\sigma = \inf\{t : X_t \in F\}$ (σ muss nicht unbedingt messbar sein). Dann gilt f.s. $\tau = \sigma$.

Beweis. Es gilt $\{\tau = \sigma\} = \{\tau < \infty, X_\tau \in F\} \cup \{\tau = \infty\}$. Da X rechtsstetige Pfade hat, folgt, dass X eine Lösung des Martingalproblems für A bezüglich $\{\mathcal{F}_{t+}^X\}$ ist. Sei $U_n = \{y : \inf\{r(x, y) : x \in F\} < n^{-1}\}$, und definieren wir $\tau_n = \inf\{t : X_t \in U_n\}$. Dann ist τ_n eine $\{\mathcal{F}_{t+}^X\}$ -Stoppzeit und $\{\tau_n\}$ ist wachsend mit Grenzwert τ . Wir bemerken, dass $\inf\{r(x, X_{\tau_n}) : x \in F\} \leq n^{-1}$. Daher gilt $\lim_n X_{\tau_n} \in F$ auf der Menge $\{\tau < \infty\}$. Nach Satz 3.35 gilt

$$\mathbb{P}[X_\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{\tau_n} \in F, \tau < \infty] = \mathbb{P}[\tau < \infty].$$

$\square$

3.4. Das Martingalproblem: Eindeutigkeit, die Markov-Eigenschaft und Dualität

Definition 3.37. Wir sagen, die Lösung des Martingalproblems für (A, μ) ist **eindeutig**, falls zwei Lösungen die gleichen endlich-dimensionalen Verteilungen haben. Wir sagen, das Martingalproblem für (A, μ) ist **wohlgestellt**, falls eine eindeutige Lösung des Martingalproblems existiert. Ist das Martingalproblem für alle Anfangsverteilungen μ wohlgestellt, dann sagen wir, dass das Martingalproblem für A **wohlgestellt** ist. Wir sagen, das Martingalproblem für (A, μ) ist **wohlgestellt in** $D_E[0, \infty)$ (oder $C_E[0, \infty)$), falls es eine eindeutige Lösung mit Pfaden in $D_E[0, \infty)$ ($C_E[0, \infty)$) gibt.

Satz 3.38. Sei E separabel und $A \subset (B(E))^2$ sei linear und dissipativ. Nehmen wir an, es gibt eine lineare Teilmenge $A' \subset A$, so dass $\overline{\mathcal{R}(\lambda - A')} = \overline{\mathcal{D}(A')} = L$ für ein $\lambda > 0$ und für ein L , das trennend ist. Sei $\mu \in \mathcal{P}(E)$ und X eine Lösung des Martingalproblems für (A, μ) . Dann ist X ein Markov Prozess mit der Halbgruppe auf L , die durch den Abschluss von A' erzeugt wird, und die Lösung des Martingalproblems für (A, μ) ist eindeutig.

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass A' abgeschlossen ist. Nach Hilfssatz 1.30 ist dann A' einwertig. Nach Hilfssatz 1.15 ist $\mathcal{R}(\lambda - A')$ abgeschlossen. Nach Satz 1.19 erzeugt A' eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe $\{T(t)\}$. Sei $(f, g) \in A'$ und $\lambda > 0$. Dann ist (3.7) ein Martingal, und daher

$$f(X_t) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda s} (\lambda f(X_{t+s}) - g(X_{t+s})) \, ds \mid \mathcal{F}_t^X \right]. \quad (3.11)$$

Insbesondere gilt für $h \in L$, dass $(n - A')^{-1}h \in \mathcal{D}(A')$ und

$$\begin{aligned} & (n - A')^{-1}h(X_t) \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-ns} (n(n - A')^{-1}h(X_{t+s}) - A'(n - A')^{-1}h(X_{t+s})) \, ds \mid \mathcal{F}_t^X \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-ns} h(X_{t+s}) \, ds \mid \mathcal{F}_t^X \right], \end{aligned}$$

oder äquivalent dazu

$$\begin{aligned} (I - n^{-1}A')^{-1}h(X_t) &= \mathbb{E} \left[n \int_0^\infty e^{-ns} h(X_{t+s}) \, ds \mid \mathcal{F}_t^X \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-s} h(X_{t+n^{-1}s}) \, ds \mid \mathcal{F}_t^X \right]. \end{aligned}$$

Iterieren wir obige Gleichung, erhalten wir

$$\begin{aligned} (I - n^{-1}A')^{-k}h(X_t) &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-(s_1+\cdots+s_k)} h(X_{t+n^{-1}(s_1+\cdots+s_k)}) ds_1 \cdots ds_k \mid \mathcal{F}_t^X\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} e^{-s} h(X_{t+n^{-1}s}) ds \mid \mathcal{F}_t^X\right]. \end{aligned}$$

Sei $u > 0$ fest. Für $f \in \mathcal{D}(A')$ haben wir

$$\mathbb{E}[f(X_{t+n^{-1}s}) \mid \mathcal{F}_t^X] = \mathbb{E}[f(X_{t+u}) \mid \mathcal{F}_t^X] + \mathbb{E}\left[\int_u^{s/n} A'f(X_{t+v}) dv \mid \mathcal{F}_t^X\right]$$

und damit

$$\begin{aligned} (I - n^{-1}A')^{-[nu]}f(X_t) &= \mathbb{E}[f(X_{t+u}) \mid \mathcal{F}_t^X] + \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \frac{s^{[nu]-1}}{([nu]-1)!} e^{-s} \int_u^{s/n} A'f(X_{t+v}) dv ds \mid \mathcal{F}_t^X\right]. \end{aligned}$$

Der zweite Ausdruck auf der rechten Seite ist durch

$$\|A'f\| \int_0^\infty \left| \frac{s}{n} - u \right| \frac{s^{[nu]-1}}{([nu]-1)!} e^{-s} ds = \|A'f\| \mathbb{E}\left[\left| n^{-1} \sum_{k=1}^{[nu]} \Delta_k - u \right|\right]$$

beschränkt, wobei $\{\Delta_k\}$ iid $\text{Exp}(1)$ verteilte Zufallsvariablen sind. Lassen wir $n \rightarrow \infty$, erhalten wir aus Korollar 1.38 und dem Gesetz der grossen Zahl

$$T(u)f(X_t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - n^{-1}A')^{-[nu]}f(X_t) = \mathbb{E}[f(X_{t+u}) \mid \mathcal{F}_t^X]. \quad (3.12)$$

Da $\mathcal{D}(A')$ dicht in L ist, gilt die Eigenschaft für alle $f \in L$. Somit ist X ein Markov Prozess. Die Eindeutigkeit folgt aus Proposition 3.9. $\square$

Satz 3.39. Sei E separabel und $A \subset (B(E))^2$. Nehmen wir an, für jede Anfangsverteilung $\mu \in \mathcal{P}(E)$ haben zwei Lösungen X und Y des Martingalproblems für (A, μ) die gleichen eindimensionalen Verteilungen; das heisst, für jedes $t \geq 0$ und $\Gamma \in \mathfrak{B}(E)$ gilt

$$\mathbb{P}[X_t \in \Gamma] = \mathbb{P}[Y_t \in \Gamma]. \quad (3.13)$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- i) Jede Lösung des Martingalproblems für A bezüglich einer Filtration $\{\mathcal{G}_t\}$ ist ein Markov Prozess bezüglich $\{\mathcal{G}_t\}$, und zwei Lösungen des Martingalproblems für (A, μ) haben die gleichen endlichdimensionalen Verteilungen (das heisst, die Lösung ist eindeutig).

- ii) Ist $A \subset \bar{C}(E) \times B(E)$ und X ist eine Lösung des Martingalproblems für A bezüglich einer Filtration $\{\mathcal{G}_t\}$ und X hat Pfade in $D_E[0, \infty)$, dann gilt für jede (f.s.) endliche $\{\mathcal{G}_t\}$ -Stoppzeit τ

$$\mathbb{E}[f(X_{\tau+t}) \mid \mathcal{G}_\tau] = \mathbb{E}[f(X_{\tau+t}) \mid X_\tau]$$

für alle $f \in B(E)$ und $t \geq 0$.

- iii) Gilt zusätzlich zu den Bedingungen aus ii), dass es für jedes $x \in E$ ein Wahrscheinlichkeitsmass $\mathbb{P}_x$ auf $D_E[0, \infty)$ gibt, das eine Lösung des Martingalproblems für (A, δ_x) ist, so dass $\mathbb{P}_x[B]$ Borel-messbar in x für jedes $B \in \mathcal{S}_E$ (die Borel σ -Algebra auf $D_E[0, \infty)$), dann gilt, mit der Definition $T(t)f(x) = \int f(\omega(t)) d\mathbb{P}_x[\omega]$,

$$\mathbb{E}[f(X_{\tau+t}) \mid \mathcal{G}_\tau] = T(t)f(X_\tau)$$

für alle $f \in B(E)$ und alle (f.s.) endlichen $\{\mathcal{G}_t\}$ -Stoppzeiten τ ; das heisst, X ist stark Markov.

Beweis. i) Sei X , definiert auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, eine Lösung des Martingalproblems für A bezüglich $\{\mathcal{G}_t\}$. Sei $r \geq 0$ und $F \in \mathcal{G}_r$, so dass $\mathbb{P}[F] > 0$. Für $B \in \mathcal{F}$ definieren wir die Masse

$$\mathbb{P}_1[B] = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_F \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \mid \mathcal{G}_r]]}{\mathbb{P}[F]} \quad (3.14)$$

und

$$\mathbb{P}_2[B] = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_F \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \mid X_r]]}{\mathbb{P}[F]}.$$

Wir setzen $Y = X_{r+}$. Es ist klar, dass $\mathbb{P}_1[Y_0 \in \Gamma] = \mathbb{P}_2[Y_0 \in \Gamma] = \mathbb{P}[X_r \in \Gamma \mid F]$. Sei $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$, $(f, g) \in A$ und $h_k \in B(E)$ für $1 \leq k \leq n$ und

$$\eta(Y) = \left(f(Y_{t_{n+1}}) - f(Y_{t_n}) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(Y_s) ds \right) \prod_{k=1}^n h_k(Y_{t_k}).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\eta(X_{r+}) \mid \mathcal{G}_r] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[f(X_{r+t_{n+1}}) - f(X_{r+t_n}) - \int_{r+t_n}^{r+t_{n+1}} g(X_s) ds \mid \mathcal{G}_{r+t_n} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{k=1}^n h_k(X_{r+t_k}) \mid \mathcal{G}_r \right] = 0. \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\mathbb{E}_1[\eta(Y)] = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_F \mathbb{E}[\eta(X_{r+}) \mid \mathcal{G}_r]]}{\mathbb{P}[F]} = 0$$

und

$$\mathbb{E}_2[\eta(Y)] = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_F \mathbb{E}[\eta(X_{r+}) \mid X_r]]}{\mathbb{P}[F]} = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_F \mathbb{E}[\mathbb{E}[\eta(X_{r+}) \mid \mathcal{G}_r] \mid X_r]]}{\mathbb{P}[F]} = 0.$$

Somit ist Y eine Lösung des Martingalproblems für A auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_1)$ und auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_2)$. Nach Voraussetzung gilt $\mathbb{E}_1[f(Y_t)] = \mathbb{E}_2[f(Y_t)]$ für jedes $f \in B(E)$ und $t \geq 0$, oder äquivalent dazu,

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_F \mathbb{E}[f(X_{r+t}) \mid \mathcal{G}_r]] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_F \mathbb{E}[f(X_{r+t}) \mid X_r]].$$

Da F beliebig war, haben wir

$$\mathbb{E}[f(X_{r+t}) \mid \mathcal{G}_r] = \mathbb{E}[f(X_{r+t}) \mid X_r],$$

das heisst, X ist ein Markov Prozess.

Seien X und Y Lösungen des Martingalproblems für (A, μ) definiert auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and $(\Gamma, \mathcal{G}, Q)$, respektive. Wir wollen die Gleichung

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\prod_{k=1}^m f_k(X_{t_k}) \right] = \mathbb{E}_Q \left[\prod_{k=1}^m f_k(Y_{t_k}) \right] \quad (3.15)$$

für alle echt wachsende Folgen $\{t_k\} \subset [0, \infty)$ und $\{f_k\} \subset B(E)$ zeigen. Wir dürfen $f_k(x) > 0$ für alle $x \in E$ annehmen. Für $m = 1$ folgt die Aussage aus (3.13). Nehmen wir an, dass (3.15) für alle $m \leq n$ gilt. Sei $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ und $f_1, \dots, f_n \in B(E)$, $f_k > 0$. Definieren wir die Masse

$$\tilde{\mathbb{P}}[B] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_B \prod_{k=1}^n f_k(X_{t_k})]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\prod_{k=1}^n f_k(X_{t_k})]}$$

und

$$\tilde{Q}[B] = \frac{\mathbb{E}_Q[\mathbb{1}_B \prod_{k=1}^n f_k(Y_{t_k})]}{\mathbb{E}_Q[\prod_{k=1}^n f_k(Y_{t_k})]},$$

und setzen wir $\tilde{X}_t = X_{t_n+t}$ und $\tilde{Y}_t = Y_{t_n+t}$. Das Argument, das wir oben gebraucht haben, zeigt, dass $\tilde{X}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_{t_n+}, \tilde{\mathbb{P}})$ und $\tilde{Y}$ auf $(\Gamma, \mathcal{G}_{t_n+}, \tilde{Q})$ Lösungen des Martingalproblems für A sind. Aus (3.15) schliessen wir

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[f(\tilde{X}_0)] = \mathbb{E}_{\tilde{Q}}[f(\tilde{Y}_0)]$$

für alle $f \in B(E)$. Also haben $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ die gleiche Anfangsverteilung. Das bedeutet, dass für $t_{n+1} > t_n$ und $f_{n+1} \in B(E)$ gilt, dass

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[f_{n+1}(\tilde{X}_{t_{n+1}-t_n})] = \mathbb{E}_{\tilde{Q}}[f_{n+1}(\tilde{Y}_{t_{n+1}-t_n})].$$

Somit haben wir (3.15) für $m = n + 1$ gezeigt. Das heisst, die endlich-dimensionalen Verteilungen sind gleich.

ii) Sei τ eine endliche $\{\mathcal{G}_t\}$ -Stoppzeit. Sei $F \in \mathcal{G}_\tau$, so dass $\mathbb{P}[F] > 0$. Für $B \in \mathcal{F}$ definieren wir die Masse

$$\mathbb{P}_1[B] = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_F \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \mid \mathcal{G}_\tau]]}{\mathbb{P}[F]}$$

und

$$\mathbb{P}_2[B] = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_F \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \mid X_\tau]]}{\mathbb{P}[F]}.$$

Wir setzen $Y = X_{\tau+}$. Es ist klar, dass $\mathbb{P}_1[Y_0 \in \Gamma] = \mathbb{P}_2[Y_0 \in \Gamma] = \mathbb{P}[X_\tau \in \Gamma \mid F]$. Sei $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$, $(f, g) \in A$ und $h_k \in B(E)$ für $1 \leq k \leq n$ und

$$\eta(Y) = \left(f(Y_{t_{n+1}}) - f(Y_{t_n}) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(Y_s) \, ds \right) \prod_{k=1}^n h_k(Y_{t_k}).$$

Da $f(X_{\tau+t_{n+1}}) - f(X_{\tau+t_n}) - \int_{\tau+t_n}^{\tau+t_{n+1}} g(X_s) \, ds$ beschränkt und rechtsstetig ist, erhalten wir aus dem Stoppsatz

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\eta(X_{\tau+}) \mid \mathcal{G}_\tau] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[f(X_{\tau+t_{n+1}}) - f(X_{\tau+t_n}) - \int_{\tau+t_n}^{\tau+t_{n+1}} g(X_s) \, ds \mid \mathcal{G}_{\tau+t_n} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{k=1}^n h_k(X_{\tau+t_k}) \mid \mathcal{G}_\tau \right] = 0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\mathbb{E}_1[\eta(Y)] = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_F \mathbb{E}[\eta(X_{\tau+}) \mid \mathcal{G}_\tau]]}{\mathbb{P}[F]} = 0$$

und

$$\mathbb{E}_2[\eta(Y)] = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_F \mathbb{E}[\eta(X_{\tau+}) \mid X_\tau]]}{\mathbb{P}[F]} = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_F \mathbb{E}[\mathbb{E}[\eta(X_{\tau+}) \mid \mathcal{G}_\tau] \mid X_\tau]]}{\mathbb{P}[F]} = 0.$$

Somit ist Y eine Lösung des Martingalproblems für A auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_1)$ und auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_2)$. Also gilt $\mathbb{E}_1[f(Y_t)] = \mathbb{E}_2[f(Y_t)]$ für jedes $f \in B(E)$ und $t \geq 0$, oder äquivalent dazu

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_F \mathbb{E}[f(X_{\tau+t}) \mid \mathcal{G}_\tau]] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_F \mathbb{E}[f(X_{\tau+t}) \mid X_\tau]].$$

Da F beliebig ist, folgt

$$\mathbb{E}[f(X_{\tau+t}) \mid \mathcal{G}_\tau] = \mathbb{E}[f(X_{\tau+t}) \mid X_\tau].$$

iii) Für $F \in \mathcal{G}_\tau$ mit $\mathbb{P}[F] > 0$ definieren wir die Masse

$$\mathbb{P}_1[B] = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_F \mathbb{E}[\mathbb{1}_B(X_{\tau+}) \mid \mathcal{G}_\tau]]}{\mathbb{P}[F]}$$

und

$$\mathbb{P}_2[B] = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_F \mathbb{P}_{X_\tau}[B]]}{\mathbb{P}[F]}.$$

Analog zum Beweis von ii) erhalten wir, dass dies Lösungen des Martingalproblems mit den gleichen Anfangsbedingungen sind, und die Behauptung folgt analog. $\square$

Korollar 3.40. Sei E separabel und $A \subset (B(E))^2$. Nehmen wir an, dass für jedes $\mu \in \mathcal{P}(E)$ zwei Lösungen des Martingalproblems für (A, μ) mit Pfaden in $D_E[0, \infty)$ (respektive $C_E[0, \infty)$) die Eigenschaft (3.13) für jedes $t \geq 0$ erfüllt ist. Dann haben für jedes $\mu \in \mathcal{P}(E)$ zwei Lösungen des Martingalproblems für (A, μ) mit Pfaden in $D_E[0, \infty)$ ($C_E[0, \infty)$) die gleiche Verteilung auf $D_E[0, \infty)$ ($C_E[0, \infty)$). Im weiteren ist jede Lösung ein Markov Prozess.

Beweis. Seien $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ wie im Beweis des Satzes 3.39 definiert. Beide haben Pfade in $D_E[0, \infty)$ ($C_E[0, \infty)$). Somit haben die Prozesse die gleiche endlich-dimensionale Verteilung und sind Markov Prozesse. Da E separabel ist, ist nach Proposition 2.30 die Verteilung auf $D_E[0, \infty)$ ($C_E[0, \infty)$) durch die endlich dimensional Verteilungen bestimmt. $\square$

Korollar 3.41. Sei E separabel und $A \subset (B(E))^2$ sei linear und dissipativ. Nehmen wir an, dass für ein (und damit alle) $\lambda > 0$, $\mathcal{D}(A) \subset \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}$ gilt, und dass es ein $M \subset B(E)$ gibt, so dass M trennend ist und $M \subset \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}$ für jedes $\lambda > 0$. Dann haben für jedes $\mu \in \mathcal{P}(E)$ zwei Lösungen des Martingalproblems für (A, μ) mit Pfaden in $D_E[0, \infty)$ die gleiche Verteilung auf $D_E[0, \infty)$.

Beweis. Sind X und Y Lösungen des Martingalproblems für (A, μ) mit Pfaden in $D_E[0, \infty)$ und ist $h \in \mathcal{R}(\lambda - A)$, dann gilt wegen (3.11)

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} h(X_t) dt\right] = \int (\lambda - A)^{-1} h d\mu = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} h(Y_t) dt\right]$$

für jedes $\lambda > 0$. Mittels beschränkter Konvergenz folgt, dass $\mathbb{E}[\int_0^\infty e^{-\lambda t} h(X_t) dt] = \mathbb{E}[\int_0^\infty e^{-\lambda t} h(Y_t) dt]$ für alle $h \in M$ gilt. Betrachten wir die Masse

$$\mathbb{P}_1[B] = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{P}[X_t \in B] dt, \quad \mathbb{P}_2[B] = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{P}[Y_t \in B] dt.$$

Da M trennend ist, sind die beiden Masse gleich, und es gilt

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{E}[h(X_t)] dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{E}[h(Y_t)] dt$$

für jedes $h \in B(E)$. Da die Laplace-Transformation eindeutig ist, X und Y rechtsstetig sind, gilt $\mathbb{E}[h(X_t)] = \mathbb{E}[h(Y_t)]$ für jedes $h \in \bar{C}(E)$ und damit auch für $h \in B(E)$. Somit gilt (3.13), und die Aussage folgt aus Korollar 3.40. $\square$

Satz 3.42. *Sei (E, r) vollständig und separabel und $A \subset \bar{C}(E) \times B(E)$. Nehmen wir an, dass es eine abzählbare Untermenge $A_0 \subset A$ gibt, so dass es für $(f, g) \in A$ eine beschränkte Folge $\{(f_n, g_n)\} \subset A_0$ gibt, so dass punktweise $f_n \rightarrow f$ und $g_n \rightarrow g$ (dies gilt zum Beispiel für $A \subset L^2$ mit einem separablem L). Nehmen wir an, das $D_E[0, \infty)$ -Martingalproblem für A ist wohlgestellt. Bezeichnen wir mit $\mathbb{P}_x$ die Lösung des Martingalproblems für (A, δ_x) . Dann ist $\mathbb{P}_x[B]$ Borel-messbar in x für jedes $B \in \mathcal{S}_E$.*

Beweis. Bezeichnen wir mit ρ die Prohorov Metrik. Nach den Sätzen 2.26 und 2.9 ist $(\mathcal{P}(D_E[0, \infty)), \rho)$ vollständig und separabel. Nach Proposition 2.19 existiert eine abzählbare Menge $M \subset \bar{C}(E)$, so dass jede Funktion in $B(E)$ als punktwiser Grenzwert einer beschränkten Folge in M erhalten werden kann.

Sei H die Klasse der Funktionen auf $D_E[0, \infty)$ der Form

$$\eta(x) = \left(f(x(t_{n+1})) - f(x(t_n)) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(x(s)) ds \right) \prod_{k=1}^n h_k(x(t_k)),$$

wobei $(f, g) \in A_0$, $h_k \in M$, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$ und $t_k \in \mathbb{Q}$. Da A_0 und M abzählbar sind, ist H abzählbar. Da f und h_k stetig sind, ist $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(D_E[0, \infty))$ genau dann eine Lösung des Martingalproblems für A , wenn $\int \eta d\mathbb{P} = 0$ für alle $\eta \in H$. Sei $\mathcal{M}_A \subset \mathcal{P}(D_E[0, \infty))$ die Klasse aller dieser Lösungen. Dann ist $\mathcal{M}_A = \cap_{\eta \in H} \{\mathbb{P} : \int \eta d\mathbb{P} = 0\}$. Die Abbildung $\mathbb{P} \mapsto \int \eta d\mathbb{P}$ ist stetig für $\eta \in \bar{C}(D_E[0, \infty))$, und daher Borel-messbar. Die Klasse aller η , für die $\mathbb{P} \mapsto \int \eta d\mathbb{P}$ Borel-messbar ist, ist abgeschlossen unter punktwiser Konvergenz von beschränkten Folgen. Somit ist $\{\mathbb{P} : \int \eta d\mathbb{P} = 0\}$ eine Borel-Menge. Da H abzählbar ist, ist $\mathcal{M}_A$ eine Borel-Menge.

Sei $G : \mathcal{P}(D_E[0, \infty)) \rightarrow \mathcal{P}(E)$, $\mathbb{P} \mapsto \mathbb{P}(X_0)^{-1}$. Die Abbildung G ist stetig. Da das Martingalproblem wohlgestellt ist, ist die Abbildung G eingeschränkt auf $\mathcal{M}_A$ bijektiv. Aus der Masstheorie folgt, dass eine bijektive Abbildung einer Borel-Teilmenge eines vollständigen separablen metrischen Raumes auf eine Borel-Teilmenge

eines vollständigen separablen Raumes eine Borel-messbare inverse Abbildung hat (siehe [1, Anhang 10]). Das heisst, ist $\mathbb{P}_\mu$ die Lösung des Martingalproblems für (A, μ) , dann ist die Abbildung $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(D_E[0, \infty))$, $\mu \mapsto \mathbb{P}_\mu$ Borel-messbar. Da $x \rightarrow \delta_x$ stetig ist, ist auch $x \mapsto \mathbb{P}_x$ Borel-messbar. $\square$

Definition 3.43. Seien (E_1, r_1) und (E_2, r_2) separable metrische Räume. Seien $A_1 \subset (B(E_1))^2$, $A_2 \subset (B(E_2))^2$, $f : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, $\alpha : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, $\beta : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, und $\mu_1 \in \mathcal{P}(E_1)$ und $\mu_2 \in \mathcal{P}(E_2)$. Die Martingalprobleme für (A_1, μ_1) und für (A_2, μ_2) sind **dual** bezüglich (f, α, β) , falls für jede Lösung X des Martingalproblems für (A_1, μ_1) und jede Lösung Y für (A_2, μ_2) gilt $\int_0^t |\alpha(X_s)| ds < \infty$, $\int_0^t |\beta(Y_s)| ds < \infty$,

$$\int \mathbb{E} \left[|f(X_t, y)| \exp \left\{ \int_0^t \alpha(X_s) ds \right\} \right] d\mu_2(y) < \infty,$$

$$\int \mathbb{E} \left[|f(x, Y_t)| \exp \left\{ \int_0^t \beta(Y_s) ds \right\} \right] d\mu_1(x) < \infty$$

und

$$\int \mathbb{E} \left[f(X_t, y) \exp \left\{ \int_0^t \alpha(X_s) ds \right\} \right] d\mu_2(y) = \int \mathbb{E} \left[f(x, Y_t) \exp \left\{ \int_0^t \beta(Y_s) ds \right\} \right] d\mu_1(x) \quad (3.16)$$

für jedes $t \geq 0$.

Bemerkung. Sind X und Y auf dem gleichen Raum definiert und unabhängig, dann kann (3.16) geschrieben werden als

$$\mathbb{E} \left[f(X_t, Y_0) \exp \left\{ \int_0^t \alpha(X_s) ds \right\} \right] = \mathbb{E} \left[f(X_0, Y_t) \exp \left\{ \int_0^t \beta(Y_s) ds \right\} \right].$$

■

Proposition 3.44. Sei (E_1, r_1) vollständig und separabel und sei (E_2, r_2) separabel. Sei $A_1 \subset (B(E_1))^2$, $A_2 \subset (B(E_2))^2$, $f : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und $\beta : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(E_1)$ eine Menge, die alle Verteilungen von X_t für alle $t \geq 0$ und alle Lösungen X des Martingalproblems für A_1 enthält, deren Anfangsverteilungen kompakten Träger haben. Nehmen wir an, (A_1, μ) und (A_2, δ_y) sind dual bezüglich $(f, 0, \beta)$ für jedes $\mu \in \mathcal{P}(E_1)$ mit kompaktem Träger und jedes $y \in E_2$. Weiter sei $\{f(\cdot, y) : y \in E_2\}$ trennend auf $\mathcal{M}$. Falls es für jedes $y \in E_2$ eine Lösung des Martingalproblems für (A_2, δ_y) gibt, dann gilt Eindeutigkeit für das Martingalproblem für (A_1, μ) für jedes $\mu \in \mathcal{P}(E_1)$.

Bemerkungen.

- i) Die Einschränkung auf μ mit kompaktem Träger ist wichtig, da wir nicht annehmen, dass f und β beschränkt sind. Die Vollständigkeit wird nur gebraucht, damit beliebige $\mu \in \mathcal{P}(E_1)$ durch $\{\mu_n\}$ mit kompaktem Träger approximiert werden können.
- ii) Die Proposition verwandelt das Eindeutigkeitsproblem für A_1 in ein Existenzproblem für A_2 . Üblicherweise sind Existenzprobleme einfacher zu lösen als Eindeutigkeitsprobleme. ■

Beweis. Sei Y_y die Lösung des Martingalproblems für (A_2, δ_y) . Seien X und $\tilde{X}$ Lösungen des Martingalproblems für (A_1, μ) . Nehmen wir zuerst an, dass μ kompakten Träger hat. Dann gilt

$$\mathbb{E}[f(X_t, y)] = \int \mathbb{E}\left[f(x, Y_y(t)) \exp\left\{\int_0^t \beta(Y_y(s)) \, ds\right\}\right] d\mu(x) = \mathbb{E}[f(\tilde{X}_t, y)].$$

Da $\{f(\cdot, y) : y \in E_2\}$ trennend auf $\mathcal{M}$ ist, gilt (3.13).

Sei nun μ beliebig. Für $0 < \varepsilon < 1$ sei K_ε eine kompakte Menge, so dass $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$. Wir können annehmen, dass $K_\varepsilon \subset K_\eta$ für $\eta < \varepsilon$. Dann sind X bedingt auf $\{X_0 \in K_\varepsilon\}$ und $\tilde{X}$ bedingt auf $\{\tilde{X}_0 \in K_\varepsilon\}$ Lösungen des Martingalproblems für $(A_1, \mu(\cdot \cap K_\varepsilon)/\mu(K_\varepsilon))$. Somit gilt für jedes $\Gamma \in \mathfrak{B}(E_1)$

$$\mathbb{P}[X_t \in \Gamma, X_0 \in K_\varepsilon] = \mathbb{P}[\tilde{X}_t \in \Gamma, \tilde{X}_0 \in K_\varepsilon].$$

Lassen wir $\varepsilon \rightarrow 0$, erhalten wir (3.13). Die Eindeutigkeit folgt nun aus Satz 3.39. □

Beispiel 3.45. Sei $E_1 = \mathbb{R}$, $E_2 = \mathbb{N}$, $A_1 f(x) = f''(x) - x f'(x)$ (Ornstein-Uhlenbeck Prozess) und $A_2 f(y) = y(y-1)(f(y-2) - f(y))$ (Sprungprozess mit Sprunghöhen -2 , der in 0 oder 1 absorbiert wird). Sei $f(x, y) = x^y$ und X eine Lösung des Martingalproblems für A_1 . Dann ist

$$X_t^y - \int_0^t (y(y-1)X_s^{y-2} - yX_s^y) \, ds$$

ein Martingal. Sei $g(x, y) = y(y-1)x^{y-2} - yx^y$ und $\alpha(x) = 0$. Sei Y der Markov Sprungprozess mit Generator A_2 . Dann ist

$$x^{Y_t} - \int_0^t Y_s(Y_s-1)(x^{Y_s-2} - x^{Y_s}) \, ds$$

ein Martingal für jedes $x \in \mathbb{R}$. Sei $h(x, y) = y(y-1)(x^{y-2} - x^y)$. Wir bemerken, dass $\mathbb{E}[f(X_t, y)] = \mathbb{E}[f(X_0, y) + \int_0^t g(X_s, y) ds]$ und daher

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[f(X_t, y)] = \mathbb{E}[g(X_t, y)]$$

und analog

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[f(x, Y_t)] = \mathbb{E}[h(x, Y_t)].$$

Dann gilt für jedes messbare $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathbb{E} \left[f(X_s, Y_{t-s}) \exp \left\{ \int_0^{t-s} \beta(Y_u) du \right\} \right] \\ = \mathbb{E} \left[\left(g(X_s, Y_{t-s}) - h(X_s, Y_{t-s}) - \beta(Y_{t-s}) f(X_s, Y_{t-s}) \right) \exp \left\{ \int_0^{t-s} \beta(Y_u) du \right\} \right]. \end{aligned}$$

Letzter Ausdruck verschwindet, falls

$$g(x, y) - h(x, y) - \beta(y) f(x, y) = 0.$$

Daher wählen wir $\beta(y) = y^2 - 2y$. Integration von 0 nach t gibt

$$\mathbb{E} [f(X_t, Y_0)] - \mathbb{E} \left[f(X_0, Y_t) \exp \left\{ \int_0^t \beta(Y_u) du \right\} \right] = 0,$$

das heisst

$$\mathbb{E} [X_t^{Y_0}] = \mathbb{E} \left[X_0^{Y_t} \exp \left\{ \int_0^t (Y_u^2 - 2Y_u) du \right\} \right].$$

Somit sind (A_1, μ) und (A_2, δ_y) dual.

Sei $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : Y_t \leq n\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \int_0^{\tau_1} (Y_u^2 - 2Y_u) du \right\} \right] &= \mathbb{E} \left[\prod_{i=2}^y \exp \left\{ \int_{\tau_i}^{\tau_{i-1}} (Y_u^2 - 2Y_u) du \right\} \right] \\ &= \prod_{i=2}^y \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \int_{\tau_i}^{\tau_{i-1}} (Y_u^2 - 2Y_u) du \right\} \right] \\ &= \prod_{i=2}^y \mathbb{E} [\exp \{(i^2 - 2i)(\tau_{i-1} - \tau_i)\}]. \end{aligned}$$

Die Zeit bis zum ersten Sprung ist exponential verteilt mit Parameter $Y_0(Y_0 - 1)$.

Ist y ungerade, so ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \int_0^{\tau_1} (Y_u^2 - 2Y_u) du \right\} \right] &= \prod_{i=1}^{(y-1)/2} \frac{(2i+1)^2 - (2i+1)}{(2i+1)^2 - (2i+1) - ((2i+1)^2 - 2(2i+1))} \\ &= (y-1)(y-3) \cdots 2. \end{aligned}$$

Ist y gerade, dann haben wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_0^{\tau_0}(Y_u^2 - 2Y_u) \, du\right\}\right] &= \prod_{i=1}^{y/2} \frac{(2i)^2 - 2i}{(2i)^2 - 2i - ((2i)^2 - 2(2i))} \\ &= (y-1)(y-3) \cdots 1.\end{aligned}$$

Hat nun μ einen kompakten Träger, so besagt das Kriterium aus [2, S. 514], dass die Verteilung von X_t eindeutig durch die Momente bestimmt ist. Wählen wir $\mathcal{M}$ als die Menge der Verteilungen auf $\mathbb{R}$, die eindeutig durch die Momente bestimmt sind, dann trennt $\{f(\cdot, y) : y \in \mathbb{N}\}$ $\mathcal{M}$. Nach Proposition 3.44 gilt Eindeutigkeit für das Martingalproblem für (A, μ) .

Wir können weiter die Grenzverteilung von X_t bestimmen. Ist $Y_0 = y$ ungerade, dann wird $Y_u^2 - 2Y_u$ schliesslich -1 , also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_t^y] = 0.$$

Ist $Y_0 = y$ gerade, dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_t^y] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_0^{\tau_0}(Y_u^2 - 2Y_u) \, du\right\}\right] = (y-1)(y-3) \cdots 1.$$

Dieses sind die Momente der Normalverteilung. Also ist die Grenzverteilung von X_t die standard Normalverteilung. ■

Satz 3.46. Seien X und Y unabhängige und messbare Prozesse auf E_1 und E_2 , respektive. Seien f, g und h messbare Abbildungen $E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und $\beta : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Nehmen wir an, dass für jedes $T > 0$ eine integrierbare Zufallsvariable Γ_T und eine Konstante C_T existiert, so dass

$$\begin{aligned}\sup_{r,s,t \leq T} (|\alpha(X_r)| + 1)|f(X_s, Y_t)| &\leq \Gamma_T, \\ \sup_{r,s,t \leq T} (|\beta(Y_r)| + 1)|f(X_s, Y_t)| &\leq \Gamma_T, \\ \sup_{r,s,t \leq T} (|\alpha(X_r)| + 1)|g(X_s, Y_t)| &\leq \Gamma_T, \\ \sup_{r,s,t \leq T} (|\beta(Y_r)| + 1)|h(X_s, Y_t)| &\leq \Gamma_T\end{aligned}$$

und

$$\int_0^T |\alpha(X_u)| \, du + \int_0^T |\beta(Y_u)| \, du \leq C_T.$$

Nehmen wir an,

$$\left\{ f(X_t, y) - \int_0^t g(X_s, y) \, ds \right\}$$

sei ein $(^*\mathcal{F}_t^X)$ -Martingal für jedes y und

$$\left\{ f(x, Y_t) - \int_0^t h(x, Y_s) \, ds \right\}$$

ist ein $(^*\mathcal{F}_t^Y)$ -Martingal für jedes x . Dann gilt für fast jedes $t \geq 0$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[f(X_t, Y_0) \exp \left\{ \int_0^t \alpha(X_u) \, du \right\} - f(X_0, Y_t) \exp \left\{ \int_0^t \beta(Y_u) \, du \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \{ g(X_s, Y_{t-s}) - h(X_s, Y_{t-s}) + (\alpha(X_s) - \beta(Y_{t-s})) f(X_s, Y_{t-s}) \} \right. \\ & \quad \left. \times \exp \left\{ \int_0^s \alpha(X_u) \, du + \int_0^{t-s} \beta(Y_u) \, du \right\} \, ds \right]. \end{aligned}$$

Bemerkung. Der Satz kann oft für generellere α und β angewendet werden, indem man α und β durch beschränkte Funktionen approximiert. ■

Beweis. Aus der Martingaleigenschaft und der Unabhängigkeit erhält man für $h \geq 0$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[f(X_{s+h}, Y_t) \exp \left\{ \int_0^{s+h} \alpha(X_u) \, du + \int_0^t \beta(Y_u) \, du \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[f(X_s, Y_t) \exp \left\{ \int_0^s \alpha(X_u) \, du + \int_0^t \beta(Y_u) \, du \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[f(X_{s+h}, Y_t) \int_s^{s+h} \alpha(X_r) \exp \left\{ \int_0^r \alpha(X_u) \, du + \int_0^t \beta(Y_u) \, du \right\} \, dr \right] \\ & \quad + \mathbb{E} \left[\int_s^{s+h} g(X_r, Y_t) \, dr \exp \left\{ \int_0^s \alpha(X_u) \, du + \int_0^t \beta(Y_u) \, du \right\} \right] \\ &= \int_s^{s+h} \mathbb{E} \left[f(X_r, Y_t) \alpha(X_r) \exp \left\{ \int_0^r \alpha(X_u) \, du + \int_0^t \beta(Y_u) \, du \right\} \right] \, dr \\ & \quad + \int_s^{s+h} \mathbb{E} \left[\int_r^{s+h} g(X_v, Y_t) \, dv \alpha(X_r) \exp \left\{ \int_0^r \alpha(X_u) \, du + \int_0^t \beta(Y_u) \, du \right\} \right] \, dr \\ & \quad + \int_s^{s+h} \mathbb{E} \left[g(X_r, Y_t) \exp \left\{ \int_0^r \alpha(X_u) \, du + \int_0^t \beta(Y_u) \, du \right\} \right] \, dr \\ & \quad + \int_s^{s+h} \mathbb{E} \left[g(X_r, Y_t) \left(\exp \left\{ \int_0^s \alpha(X_u) \, du \right\} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \exp \left\{ \int_0^r \alpha(X_u) \, du \right\} \right) \exp \left\{ \int_0^t \beta(Y_u) \, du \right\} \right] \, dr. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Die Variablen sind wegen den Voraussetzungen integrierbar. Insbesondere, für $t, s +$

$h \leq T$

$$\begin{aligned} \int_s^{s+h} \left| \mathbb{E} \left[\int_r^{s+h} g(X_v, Y_t) \, dv \, \alpha(X_r) \exp \left\{ \int_0^r \alpha(X_u) \, du + \int_0^t \beta(Y_u) \, du \right\} \right] \right| \, dr \\ \leq \int_s^{s+h} \int_r^{s+h} \mathbb{E}[\Gamma_T] e^{C_T} \, dv \, dr = \frac{1}{2} h^2 \mathbb{E}[\Gamma_T] e^{C_T} \quad (3.18) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_s^{s+h} \mathbb{E} \left[g(X_r, Y_t) \left(\exp \left\{ \int_0^s \alpha(X_u) \, du \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - \exp \left\{ \int_0^r \alpha(X_u) \, du \right\} \right) \exp \left\{ \int_0^t \beta(Y_u) \, du \right\} \right] \, dr \\ = \int_s^{s+h} \mathbb{E} \left[g(X_r, Y_t) \int_r^s \alpha(X_v) \exp \left\{ \int_0^v \alpha(X_u) \, du + \int_0^t \beta(Y_u) \, du \right\} \, dv \right] \, dr \\ \leq \int_s^{s+h} \int_r^s \mathbb{E}[\Gamma_T] e^{C_T} \, dv \, dr = \frac{1}{2} h^2 \mathbb{E}[\Gamma_T] e^{C_T}. \quad (3.19) \end{aligned}$$

Setzen wir

$$F(s, t) = \mathbb{E} \left[f(X_s, Y_t) \exp \left\{ \int_0^s \alpha(X_u) \, du + \int_0^t \beta(Y_u) \, du \right\} \right].$$

Für $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = s$ schreiben wir

$$F(s, t) - F(0, t) = \sum_{i=1}^m [F(s_i, t) - F(s_{i-1}, t)].$$

Lassen wir $\max_i \{s_i - s_{i-1}\} \rightarrow 0$, so folgt aus (3.17), (3.18) und (3.19), dass

$$\begin{aligned} F(s, t) - F(0, t) \\ = \int_0^s \mathbb{E} \left[\left(f(X_r, Y_t) \alpha(X_r) + g(X_r, Y_t) \right) \exp \left\{ \int_0^r \alpha(X_u) \, du + \int_0^t \beta(Y_u) \, du \right\} \right] \, dr. \quad (3.20) \end{aligned}$$

Also ist $F(s, t)$ für jedes feste t absolutstetig in s . Analog folgt

$$\begin{aligned} F(s, t) - F(s, 0) \\ = \int_0^t \mathbb{E} \left[\left(f(X_s, Y_r) \beta(Y_r) + h(X_s, Y_r) \right) \exp \left\{ \int_0^s \alpha(X_u) \, du + \int_0^r \beta(Y_u) \, du \right\} \right] \, dr \quad (3.21) \end{aligned}$$

und $F(s, t)$ ist für jedes feste s absolutstetig in t . Das Resultat folgt nun aus

$$F(t, 0) - F(0, t) = \int_0^t (F_1(s, t-s) - F_2(s, t-s)) \, ds,$$

wobei $F_1(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} F(s, t)$ und $F_2(s, t) = \frac{\partial}{\partial t} F(s, t)$ die Dichten bezeichnet. $\square$

Korollar 3.47. *Gilt zusätzlich zu den Bedingungen von Satz 3.46 die Gleichung $g(x, y) + \alpha(x)f(x, y) = h(x, y) + \beta(y)f(x, y)$, dann gilt für alle $t \geq 0$*

$$\mathbb{E}\left[f(X_t, Y_0) \exp\left\{\int_0^t \alpha(X_u) \, du\right\}\right] = \mathbb{E}\left[f(X_0, Y_t) \exp\left\{\int_0^t \beta(Y_u) \, du\right\}\right].$$

Beweis. Nach Satz 3.46 gilt die Aussage für fast alle $t \geq 0$. Aber aus (3.20) beziehungsweise (3.21) folgt, dass $F(t, 0)$ und $F(0, t)$ stetig sind. Somit gilt die Aussage für alle t . $\square$

Korollar 3.48. *Seien $\{\mathcal{F}_t\}$ und $\{\mathcal{G}_t\}$ zwei Filtrationen. Sei X ein $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptierter Prozess und τ sei eine $\{\mathcal{F}_t\}$ -Stoppzeit. Sei Y ein $\{\mathcal{G}_t\}$ -adaptierter Prozess und σ eine $\{\mathcal{G}_t\}$ -Stoppzeit. Seien $\{X_{t \wedge \tau}\}$ und $\{Y_{t \wedge \sigma}\}$ unabhängig. Nehmen wir an, für jedes $T > 0$ existiert eine integrierbare Zufallsvariable Γ_T und eine Konstante C_T , so dass*

$$\begin{aligned} \sup_{r,s,t \leq T} (|\alpha(X_{r \wedge \tau})| + 1) |f(X_{s \wedge \tau}, Y_{t \wedge \sigma})| &\leq \Gamma_T, \\ \sup_{r,s,t \leq T} (|\beta(Y_{r \wedge \sigma})| + 1) |f(X_{s \wedge \tau}, Y_{t \wedge \sigma})| &\leq \Gamma_T, \\ \sup_{r,s,t \leq T} (|\alpha(X_{r \wedge \tau})| + 1) |g(X_{s \wedge \tau}, Y_{t \wedge \sigma})| &\leq \Gamma_T, \\ \sup_{r,s,t \leq T} (|\beta(Y_{r \wedge \sigma})| + 1) |h(X_{s \wedge \tau}, Y_{t \wedge \sigma})| &\leq \Gamma_T \end{aligned}$$

und

$$\int_0^T |\alpha(X_{u \wedge \tau})| \, du + \int_0^T |\beta(Y_{u \wedge \sigma})| \, du \leq C_T.$$

Nehmen wir an, dass

$$\left\{ f(X_{t \wedge \tau}, y) - \int_0^{t \wedge \tau} g(X_s, y) \, ds \right\}$$

ein $\{\mathcal{F}_t\}$ -Martingal ist für jedes y und

$$\left\{ f(x, Y_{t \wedge \sigma}) - \int_0^{t \wedge \sigma} h(x, Y_s) \, ds \right\}$$

ein $\{\mathcal{G}_t\}$ -Martingal ist für jedes x . Dann gilt für fast jedes $t \geq 0$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[f(X_{t \wedge \tau}, Y_0) \exp\left\{\int_0^{t \wedge \tau} \alpha(X_u) \, du\right\} - f(X_0, Y_{t \wedge \sigma}) \exp\left\{\int_0^{t \wedge \sigma} \beta(Y_u) \, du\right\}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^t (\mathbb{I}_{\{s \leq \tau\}} g(X_s, Y_{(t-s) \wedge \sigma}) - \mathbb{I}_{\{t-s \leq \sigma\}} h(X_{s \wedge \tau}, Y_{t-s})) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbb{I}_{\{s \leq \tau\}} \alpha(X_s) - \mathbb{I}_{\{t-s \leq \sigma\}} \beta(Y_{t-s})) f(X_{s \wedge \tau}, Y_{(t-s) \wedge \sigma}) \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left\{\int_0^{s \wedge \tau} \alpha(X_u) \, du + \int_0^{(t-s) \wedge \sigma} \beta(Y_u) \, du\right\} \, ds\right]. \end{aligned}$$

Beweis. Dies kann durch eine leichte Modifikation des Beweises von Satz 3.46 gezeigt werden. $\square$

Korollar 3.49. Gilt zusätzlich zu den Bedingungen von Korollar 3.48 die Gleichung $g(x, y) + \alpha(x)f(x, y) = h(x, y) + \beta(y)f(x, y)$, dann gilt für alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[f(X_{t \wedge \tau}, Y_0) \exp \left\{ \int_0^{t \wedge \tau} \alpha(X_u) du \right\} - f(X_0, Y_{t \wedge \sigma}) \exp \left\{ \int_0^{t \wedge \sigma} \beta(Y_u) du \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t (\mathbb{1}_{\{s \leq \tau\}} - \mathbb{1}_{\{t-s \leq \sigma\}}) \{ g(X_{s \wedge \tau}, Y_{(t-s) \wedge \sigma}) + \alpha(X_{s \wedge \tau}) f(X_{s \wedge \tau}, Y_{(t-s) \wedge \sigma}) \} \right. \\ & \quad \left. \times \exp \left\{ \int_0^{s \wedge \tau} \alpha(X_u) du + \int_0^{(t-s) \wedge \sigma} \beta(Y_u) du \right\} ds \right]. \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt sofort aus Korollar 3.48. $\square$

Bemerkung. Lassen wir τ und σ nach Unendlich, so konvergiert der Integrand auf der rechten Seite nach 0. Das Problem wird aber sein zu zeigen, dass man Grenzwert und die Integrale vertauschen darf. $\blacksquare$

3.5. Das Martingalproblem: Existenz

Hilfssatz 3.50. Sei $A \subset (\bar{C}(E))^2$ und $A_n \subset (B(E))^2$, $n \in \mathbb{N}$. Nehmen wir an, dass es für jedes $(f, g) \in A$ eine Folge $(f_n, g_n) \in A_n$ gibt, so dass $\lim_n (f_n, g_n) = (f, g)$. Für jedes n sei X_n eine Lösung des Martingalproblems für A_n mit Pfaden in $D_E[0, \infty)$. Falls $X_n \Rightarrow X$, dann ist X eine Lösung des Martingalproblems für A .

Beweis. Sei $0 \leq t_i \leq t < s$, $t_i, t, s \in D(X) = \{u : \mathbb{P}[X(u) = X(u-)] = 1\}$ und $h_i \in \bar{C}(E)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Dann gibt es für $(f, g) \in A$ Funktionen $(f_n, g_n) \in A_n$, so dass $(f_n, g_n) \rightarrow (f, g)$. Dann konvergiert

$$\mathbb{E}[f(X(t)) - f_n(X_n(t))] = \mathbb{E}[f(X(t)) - f(X_n(t))] + \mathbb{E}[f(X_n(t)) - f_n(X_n(t))]$$

für $n \rightarrow \infty$ nach 0. Der analoge Grenzwert gilt für alle endlichen Dimensionen. Also gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(f(X(s)) - f(X(t)) - \int_t^s g(X(u)) du \right) \prod_{i=1}^k h_i(X(t_i)) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(f_n(X_n(s)) - f_n(X_n(t)) - \int_t^s g_n(X_n(u)) du \right) \prod_{i=1}^k h_i(X_n(t_i)) \right] = 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Die Menge $[0, \infty) \setminus D(X)$ ist abzählbar (Hilfssatz 2.32). Da X rechtsstetig und die Funktionen in $\bar{C}(E)$ sind, gilt (3.22) für beliebige t_i, t, s . Das heisst,

$$\mathbb{E} \left[f(X(s)) - f(X_t) - \int_t^s g(X_u) \, du \mid \mathcal{F}_t^X \right] = 0 ,$$

und X ist eine Lösung des Martingalproblems für A . $\square$

Hilfssatz 3.51. Sei E kompakt und A ein dissipativer linearer Operator auf $C(E)$, so dass $\mathcal{D}(A)$ dicht ist in $C(E)$ und $(1, 0) \in A$. Dann gibt es eine Folge $\{T_n\}$ von positiven Kontraktionsoperatoren auf $B(E)$, die durch Übergangskerne erzeugt werden, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(T_n - I)f = Af$$

für alle $f \in \mathcal{D}(A)$.

Beweis. Die Abbildung $\Lambda f = n(n - A)^{-1}f(x)$ ist ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathcal{R}(n - A)$ für jedes $n \geq 1$ und $x \in E$. Da $\Lambda 1 = 1$ und $|\Lambda f| \leq \|f\|$, gilt für $f \geq 0$

$$\|f\| - \Lambda f = \Lambda(\|f\| - f) \leq \|f\| ,$$

also $\Lambda f \geq 0$. Also ist Λ ein positives lineares Funktional auf $\mathcal{R}(n - A)$ mit $\|\Lambda\| = 1$. Also kann nach dem Hahn–Banach–Theorem Λ zu einem positiven linearen Funktional mit Norm 1 auf ganz $C(E)$ fortgesetzt werden. Dieses Funktional hat eine Riesz Representation, das heisst, es gibt $\mu \in \mathcal{P}(E)$, so dass $\Lambda f = \int f \, d\mu$ für alle $f \in \mathcal{R}(n - A)$. Das bedeutet, dass die Menge

$$M_x^n = \left\{ \mu \in \mathcal{P}(E) : n(n - A)^{-1}f(x) = \int f \, d\mu \text{ für alle } f \in \mathcal{R}(n - A) \right\}$$

für kein $n \geq 1$ und $x \in E$ leer ist.

Sei nun $\{x_k\} \subset E$, so dass $x = \lim_k x_k$ und $\mu_k \in M_{x_k}^n$. Da $\mathcal{P}(E)$ kompakt ist (Satz 2.14), gibt es eine konvergente Teilfolge von $\{\mu_k\}$, die gegen ein $\mu_\infty \in \mathcal{P}(E)$ konvergiert. Aus

$$\int f \, d\mu_\infty = \lim_k \int f \, d\mu_k = \lim_k n(n - A)^{-1}f(x_k) = n(n - A)^{-1}f(x)$$

folgt, dass $\mu_\infty \in M_x^n$. Nach dem Selektionstheorem gibt es ein $\mu_x^n \in M_x^n$, so dass die Abbildung $E \rightarrow \mathcal{P}(E)$, $x \mapsto \mu_x^n$ eine messbare Funktion ist. Dann ist $\mu_n(x, \Gamma) = \mu_x^n(\Gamma)$ ein Übergangskern und $T_n f(x) = \int f(y) \, d\mu_n(x, dy)$ definiert eine positive Kontraktion auf $B(E)$.

Für $f \in \mathcal{D}(A)$ haben wir

$$T_n f = T_n(f - n^{-1}Af) + n^{-1}T_n Af = f + n^{-1}T_n Af.$$

Also gilt $\lim_n T_n f = f$. Da $\mathcal{D}(A)$ dicht ist in $C(E)$, gilt letzteres für alle $f \in C(E)$. Insbesondere haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(T_n - I)f = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n Af = Af,$$

da $Af \in C(E)$. □

Satz 3.52. Sei E lokal kompakt und separabel, und A ein linearer Operator auf $\hat{C}(E)$, so dass $\mathcal{D}(A)$ dicht ist in $\hat{C}(E)$ und A das positive Maximumsprinzip erfüllt. Definieren wir den linearen Operator A^Δ auf $C(\mathbb{I}^\Delta)$ mittels

$$(A^\Delta f)|_E = A((f - f(\Delta))|_E), \quad A^\Delta f(\Delta) = 0, \quad (3.23)$$

für alle $f \in C(\mathbb{I}^\Delta)$ mit $(f - f(\Delta))|_E \in \mathcal{D}(A)$. Dann existiert für jedes Wahrscheinlichkeitsmass $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{I}^\Delta)$ eine Lösung des Martingalproblems für (A^Δ, ν) mit Pfaden in $D_{\mathbb{I}^\Delta}[0, \infty)$.

Bemerkung. Erfüllt A^Δ die Bedingungen des Satzes 3.32 und gilt $\nu(E) = 1$, dann hat die obige Lösung des Martingalproblems für (A^Δ, ν) Pfade in $D_E[0, \infty)$. Dies ist zum Beispiel der Fall, falls E kompakt ist und $(1, 0) \in A$. ■

Beweis. Es gilt $\overline{\mathcal{D}(A^\Delta)} = C(\mathbb{I}^\Delta)$. Wir wollen zeigen, dass A^Δ das positive Maximumsprinzip erfüllt. Ist $f \in \mathcal{D}(A^\Delta)$, $\sup_y f(y) = f(x_0) \geq 0$ und $x_0 \in E$, dann ist $A^\Delta f(x_0) = A(f - f(\Delta))(x_0) \leq 0$. Ist $x_0 = \Delta$, dann ist $A^\Delta f(\Delta) = 0 \leq 0$. Insbesondere ist A^Δ dissipativ (Lemma 3.12). Im weiteren ist $(1, 0) \in A^\Delta$. Nach Hilfssatz 3.51 gibt es eine Folge von Übergangskernen $\mu_n(x, \Gamma)$ auf $\mathbb{I}^\Delta \times \mathfrak{B}(\mathbb{I}^\Delta)$, so dass für

$$A_n f = n \int (f(y) - f(\cdot)) \mu_n(\cdot, dy), \quad (f \in B(\mathbb{I}^\Delta)),$$

der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n f = A^\Delta f, \quad (f \in \mathcal{D}(A^\Delta)),$$

gilt. A_n ist der Generator eines Markov-Sprungprozesses. Also hat für jedes Mass $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{I}^\Delta)$ das Martingalproblem für (A_n, ν) eine Lösung mit Pfaden in $D_{\mathbb{I}^\Delta}[0, \infty)$. Nach Satz 2.42 (mit $Y_n(t) = f(X_n(t))$ und $Z_n(t) = A_n f(X_n(t))$) ist $(f \circ X_n)$ relativ kompakt für jedes $f \in C(\mathbb{I}^\Delta)$. Nach Korollar 2.41 ist $\{X_n\}$ relativ kompakt. Somit folgt aus Hilfssatz 3.50, dass eine Lösung des Martingalproblems für (A^Δ, ν) existiert. □

Im Rest dieses Abschnitts bezeichnet X einen Prozess mit Pfaden in $D_E[0, \infty)$, $\mathcal{T}$ eine Klasse von positiven beschränkten Borel-messbaren Funktionen auf $D_E[0, \infty)$, die alle positiven Konstanten enthält, und

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X \vee \sigma(\{\tau \leq s\} : s \leq t, \tau \in \mathcal{T}). \quad (3.24)$$

Dank der Definition sind alle $\tau \in \mathcal{T}$ $\{\mathcal{F}_t\}$ -Stoppzeiten. Sei $\Gamma \subset \mathcal{P}(D_E[0, \infty))$. Für jedes $\nu \in \mathcal{P}(E)$ definieren wir $\Gamma_\nu = \{\mathbb{P} \in \Gamma : \mathbb{P}[X_0 \in B] = \nu(B) \text{ für alle } B \in \mathfrak{B}(E)\}$. Nehmen wir an, dass $\Gamma_\nu \neq \emptyset$ für jedes ν . Für $f \in B(E)$ definieren wir

$$\gamma(\Gamma_\nu, f) = \sup_{\mathbb{P} \in \Gamma_\nu} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty e^{-t} f(X_t) dt \right].$$

Hilfssatz 3.53. Seien $f, g \in B(E)$ und

$$\left\{ f(X_t) - \int_0^t g(X_s) ds \right\}$$

sei ein $\{\mathcal{F}_t\}$ -Martingal für alle $\mathbb{P} \in \Gamma_\nu$. Dann gilt

$$\gamma(\Gamma_\nu, f - g) = \int f d\nu = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty e^{-t} (f(X_t) - g(X_t)) dt \right]$$

für alle $\mathbb{P} \in \Gamma_\nu$.

Beweis. Aus Hilfssatz 3.26 folgt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty e^{-t} (f(X_t) - g(X_t)) dt \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X_0)] = \int f d\nu.$$

□

Definition 3.54. Wir definieren die folgenden Bedingungen an Γ und $\mathcal{T}$:

C_1 : Für $\mathbb{P} \in \Gamma$, $\tau \in \mathcal{T}$, $\mu(B) = \mathbb{P}[X_\tau \in B]$ und $\mathbb{P}' \in \Gamma_\mu$ gibt es ein $\hat{Q} \in \mathcal{P}(D_E[0, \infty) \times [0, \infty))$ mit Randverteilung $Q \in \Gamma$, so dass

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\hat{Q}}[\mathbb{1}_B(X(\cdot \wedge \eta), \eta) \mathbb{1}_C(X(\eta + \cdot))] \\ &= \int \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_B(X(\cdot \wedge \tau), \tau) \mid X(\tau) = x] \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}[\mathbb{1}_C(X) \mid X(0) = x] d\mu(x) \end{aligned} \quad (3.25)$$

für alle $B \in \mathcal{S}_E \times \mathfrak{B}[0, \infty)$ und $C \in \mathcal{S}_E$, wobei (X, η) die Zufallsvariable auf $D_E[0, \infty) \times [0, \infty)$ bezeichnet.

C_2 : Für $\mathbb{P} \in \Gamma$, $\tau \in \mathcal{T}$ und $H \geq 0$ $\{\mathcal{F}_\tau\}$ -messbar mit $0 < \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H] < \infty$ gehört das Mass $Q \in \mathcal{P}(D_E[0, \infty))$ zu Γ , wobei Q definiert ist als

$$Q[C] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H \mathbb{1}_C(X_{\tau+})]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H]} \quad (3.26)$$

C_3 : Γ ist konvex.

C_4 : Zu jedem $h \in \bar{C}(E)$ mit $h \geq 0$ gibt es ein $u \in B(E)$, so dass $\gamma(\Gamma_\nu, h) = \int u \, d\nu$ für alle $\nu \in \mathcal{P}(E)$.

C_5 : Γ_ν ist kompakt für alle $\nu \in \mathcal{P}(E)$.

C'_2 : Für $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(E)$, $\nu = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2$ für ein $\alpha \in (0, 1)$ und für $\mathbb{P} \in \Gamma_\nu$ gibt es ein $Q_1 \in \Gamma_{\mu_1}$ und ein $Q_2 \in \Gamma_{\mu_2}$, so dass $\mathbb{P} = \alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2$.

C'_5 : $\bigcup_{\nu \in V} \Gamma_\nu$ ist kompakt für alle kompakten Mengen $V \subset \mathcal{P}(E)$.

Hilfssatz 3.55. Bedingung C_2 impliziert C'_2 .

Beweis. Sei h_i die Dichte von μ_i bezüglich ν . Dann ist $\alpha h_1 + (1 - \alpha)h_2 = 1$. Definieren wir

$$Q_i[C] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h_i(X_0) \mathbb{1}_C(X)] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h_i(X_0) \mathbb{1}_C(X)]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h_i(X_0)]}.$$

Wegen C_2 ist $Q_i \in \Gamma$ und ist daher in Γ_{μ_i} . Somit gilt

$$\alpha Q_1[C] + (1 - \alpha)Q_2[C] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(\alpha h_1(X_0) + (1 - \alpha)h_2(X_0)) \mathbb{1}_C(X)] = \mathbb{P}[C].$$

□

Hilfssatz 3.56. Sei E separabel. Sei $\varphi : \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, c]$ für ein $c > 0$. Nehmen wir an, φ erfülle

$$\varphi(\alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2) = \alpha\varphi(\mu_1) + (1 - \alpha)\varphi(\mu_2)$$

für $\alpha \in (0, 1)$ und $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(E)$, und

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varphi(\nu_n) \leq \varphi(\nu)$$

für $\nu \in \mathcal{P}(E)$, $\{\nu_n\} \subset \mathcal{P}(E)$, so dass $\nu_n \Rightarrow \nu$. Dann gibt es ein $u \in B(E)$, so dass

$$\varphi(\nu) = \int u \, d\nu.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mu_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi(\mu_i) \quad (3.27)$$

falls $\sum \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ und $\{\mu_i\} \subset \mathcal{P}(E)$. Die Formel gilt klarerweise, falls nur für endlich viele α_i verschieden von 0 sind. Somit können wir annehmen, dass unendlich viele α_i nicht verschwinden. Dann gilt für $\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mu_i$

$$\begin{aligned} \varphi(\nu) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mu_i + \left[\sum_{l=k+1}^{\infty} \alpha_l\right] \frac{\nu - \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu_i}{\sum_{l=k+1}^{\infty} \alpha_l}\right) \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi(\mu_i) + \left[\sum_{l=k+1}^{\infty} \alpha_l\right] \varphi\left(\frac{\nu - \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu_i}{\sum_{l=k+1}^{\infty} \alpha_l}\right). \end{aligned}$$

(3.27) folgt nun, wenn wir $k \rightarrow \infty$ gehen lassen.

Sei $u(x) = \varphi(\delta_x)$. Konvergiert $x_n \rightarrow x$ und gilt $u(x_n) \geq a$, dann gilt auch $u(x) = \varphi(\delta_x) \geq \liminf u(x_n) \geq a$. Also sind die Mengen $\{x : u(x) \geq a\}$ abgeschlossen, und daher ist u messbar. Seien E_i^n , $i \in \mathbb{N}$ disjunkte Mengen, so dass $\sup\{r(x, y) : x, y \in E_i^n\} < n^{-1}$ und $\bigcup_i E_i^n = E$. Wählen wir $x_i^n \in E_i^n$, so dass $u(x_i^n) > \sup\{u(x) : x \in E_i^n\} - n^{-1}$. Sei $\nu \in \mathcal{P}(E)$ fest. Wir definieren u_n als

$$u_n(x) = \sum_i u(x_i^n) \mathbb{1}_{E_i^n}(x),$$

und das Mass

$$\nu_n = \sum_i \nu(E_i^n) \delta_{x_i^n}.$$

$\{u_n\}$ ist beschränkt. Sei $x \in E$ und i_n , so dass $x \in E_{i_n}^n$. Dann konvergiert $x_{i_n}^n$ nach x und somit ist $u(x) = \lim_n u(x) - n^{-1} \leq \liminf u(x_{i_n}^n) \leq u(x)$. Also konvergiert u_n punktweise nach u . Weiter gilt $\nu_n \Rightarrow \nu$. Somit haben wir

$$\int u \, d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n \, d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n \, d\nu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\nu_n) \leq \varphi(\nu).$$

Setzen wir $\mu_i^n(B) = \nu(B \cap E_i^n) / \nu(E_i^n)$, vorausgesetzt, dass $\nu(E_i^n) > 0$, und $v_n(x) = \sum_i \varphi(\mu_i^n) \mathbb{1}_{E_i^n}(x)$. Dann gilt $\liminf v_n(x) \leq \varphi(\delta_x) = u(x)$ und damit

$$\varphi(\nu) = \sum_i \varphi(\mu_i^n) \nu(E_i^n) = \int v_n \, d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int v_n \, d\nu \leq \int \liminf_{n \rightarrow \infty} v_n \, d\nu \leq \int u \, d\nu.$$

□

Hilfssatz 3.57. Sei (E, r) vollständig und separabel. Nehmen wir an, dass C'_2 und C_3 erfüllt sind. Dann gilt für $h \in B(E)$ mit $h \geq 0$

$$\gamma(\Gamma_{\alpha\mu_1+(1-\alpha)\mu_2}, h) = \alpha\gamma(\Gamma_{\mu_1}, h) + (1-\alpha)\gamma(\Gamma_{\mu_2}, h)$$

für alle $\alpha \in (0, 1)$ und $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(E)$. Gilt zusätzlich C'_5 , dann gilt auch C_4 .

Beweis. Seien $h \in B(E)$, $h \geq 0$, $\alpha \in (0, 1)$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(E)$ und $\nu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$. Für $\mathbb{P} \in \Gamma_\nu$ gibt es wegen C'_2 Masse $Q_i \in \Gamma_{\mu_i}$, so dass $\mathbb{P} = \alpha Q_1 + (1-\alpha)Q_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty e^{-t} h(X_t) dt \right] &= \alpha \mathbb{E}_{Q_1} \left[\int_0^\infty e^{-t} h(X_t) dt \right] + (1-\alpha) \mathbb{E}_{Q_2} \left[\int_0^\infty e^{-t} h(X_t) dt \right] \\ &\leq \alpha \gamma(\Gamma_{\mu_1}, h) + (1-\alpha) \gamma(\Gamma_{\mu_2}, h). \end{aligned}$$

Nehmen wir das Supremum über $\mathbb{P} \in \Gamma_\nu$, haben wir

$$\gamma(\Gamma_\nu, h) \leq \alpha \gamma(\Gamma_{\mu_1}, h) + (1-\alpha) \gamma(\Gamma_{\mu_2}, h).$$

Seien $Q_i \in \Gamma_{\mu_i}$ und $\mathbb{P} = \alpha Q_1 + (1-\alpha)Q_2$. Wegen C_3 ist $\mathbb{P} \in \Gamma$. Es ist klar, dass $\mathbb{P} \in \Gamma_\nu$. Daher haben wir

$$\begin{aligned} \alpha \mathbb{E}_{Q_1} \left[\int_0^\infty e^{-t} h(X_t) dt \right] + (1-\alpha) \mathbb{E}_{Q_2} \left[\int_0^\infty e^{-t} h(X_t) dt \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty e^{-t} h(X_t) dt \right] \\ &\leq \gamma(\Gamma_\nu, h). \end{aligned}$$

Nehmen wir das Supremum über $Q_1 \in \Gamma_{\mu_1}$ und über $Q_2 \in \Gamma_{\mu_2}$, erhalten wir

$$\alpha \gamma(\Gamma_{\mu_1}, h) + (1-\alpha) \gamma(\Gamma_{\mu_2}, h) \leq \gamma(\Gamma_\nu, h).$$

Gilt zusätzlich C'_5 , dann gilt für $\nu \in \mathcal{P}(E)$ und $\{\nu_n\} \subset \mathcal{P}(E)$, so dass $\nu_n \Rightarrow \nu$, dass $\Gamma_\nu \cup \bigcup_n \Gamma_{\nu_n}$ kompakt ist. Somit gilt für jede schwach konvergente Folge $\mathbb{P}_n \in \Gamma_{\nu_n}$, dass sie schwach gegen ein $\mathbb{P} \in \Gamma_\nu$ konvergiert. Somit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n} \left[\int_0^\infty e^{-t} h(X_t) dt \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty e^{-t} h(X_t) dt \right] \leq \gamma(\Gamma_\nu, h).$$

Also haben wir

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \gamma(\Gamma_{\nu_n}, h) \leq \gamma(\Gamma_\nu, h).$$

Nach Hilfssatz 3.56 ist C_4 erfüllt. □

Hilfssatz 3.58. Seien (E, r) , (S_i, ρ_i) ($i \in \{1, 2\}$) vollständige separable Räume, $\mathbb{P}_i \in \mathcal{P}(S_i)$, und $X_i : S_i \rightarrow E$ Borel messbar, so dass für $\mu(B) = \mathbb{P}_1[X_1 \in B] \in \mathcal{P}(E)$ gilt, dass $\mu(B) = \mathbb{P}_2[X_2 \in B]$ für $B \in \mathfrak{B}(E)$. Seien $\{B_i^m\} \subset \mathfrak{B}(E)$, $m \in \mathbb{N}$, eine Folge von Partitionen von E , so dass $\{B_i^{m+1}\}$ eine Verfeinerung von $\{B_i^m\}$ ist, und $\lim_m \sup_i \{r(x, y) : x, y \in B_i^m\} = 0$. Definieren wir $\mathbb{P}^m \in \mathcal{P}(S_1 \times S_2)$ durch

$$\mathbb{P}^m[C] = \sum_i \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2}[\mathbb{1}_C \mathbb{1}_{B_i^m}(X_1) \mathbb{1}_{B_i^m}(X_2)]}{\mu(B_i^m)}$$

für $C \in \mathfrak{B}(S_1 \times S_2)$. Dann konvergiert $\{\mathbb{P}^m\}$ schwach gegen ein Mass $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(S_1 \times S_2)$, das

$$\mathbb{P}[A_1 \times A_2] = \int \mathbb{P}_1[A_1 \mid X_1 = x] \mathbb{P}_2[A_2 \mid X_2 = x] d\mu(x) \quad (3.28)$$

für $A_1 \in \mathfrak{B}(S_1)$ und $A_2 \in \mathfrak{B}(S_2)$ erfüllt. Insbesondere gilt $\mathbb{P}[A_1 \times S_2] = \mathbb{P}_1[A_1]$ und $\mathbb{P}[S_1 \times A_2] = \mathbb{P}_2[A_2]$. Allgemeiner gilt, falls $Z_k \in \mathfrak{B}(S_k)$, dann ist

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_1 Z_2] = \int \mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}[Z_1 \mid X_1 = x] \mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}[Z_2 \mid X_2 = x] d\mu(x).$$

Beweis. Seien $A_k \in \mathfrak{B}(S_k)$, $k = 1, 2$. Für $x \in E$ ist

$$M_m = \sum_i \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}_k}[\mathbb{1}_{A_k} \mathbb{1}_{B_i^m}(X_k)] \mathbb{1}_{B_i^m}(x)}{\mu(B_i^m)}$$

ein beschränktes Martingal bezüglich der Filtration, die durch die $\{B_i^m\}$ erzeugt wird. Nach dem Konvergenztheorem konvergiert das Martingal in $L_2(\mu)$. Der einzig mögliche Grenzwert ist $\mathbb{P}_k[A_k \mid X_k = x]$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}^m[A_1 \times A_2] &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_i \frac{\mathbb{P}_1[A_1 \cap B_i^m] \mathbb{P}_2[A_2 \cap B_i^m]}{\mu(B_i^m)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_i \mathbb{E} \left[\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}[\mathbb{1}_{A_1} \mathbb{1}_{B_i^m}(X_1)] \mathbb{1}_{B_i^m}(X_1)}{\mu(B_i^m)} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}[\mathbb{1}_{A_2} \mathbb{1}_{B_i^m}(X_2)] \mathbb{1}_{B_i^m}(X_2)}{\mu(B_i^m)} \right] \mu(B_i^m) \\ &= \int \mathbb{P}_1[A_1 \mid X_1 = x] \mathbb{P}_2[A_2 \mid X_2 = x] d\mu(x), \end{aligned}$$

wobei wir hier kurz $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2}$ geschrieben haben. Wählen wir kompakte Teilmengen $K_i \subset S_i$, so dass $\mathbb{P}_k[K_k] \geq 1 - \varepsilon^2$. Sei $A = \{x \in E : \mathbb{P}_k[K_k \mid X_k = x] \leq 1 - \varepsilon\}$. Dann gilt

$$1 - \varepsilon^2 \leq \mathbb{P}_k[K_k] = \int \mathbb{P}_k[K_k \mid X_k = x] d\mu(x) \leq \mu(A^c) + (1 - \varepsilon)\mu(A) = 1 - \varepsilon\mu(A),$$

das heisst, $\mu(A) \leq \varepsilon$. Daher gilt

$$\mathbb{P}[K_1 \times K_2] = \int \mathbb{P}_1[K_1 \mid X_1 = x] \mathbb{P}_2[K_2 \mid X_2 = x] d\mu(x) \geq (1 - \varepsilon)^2(1 - 2\varepsilon).$$

Somit ist die Folge $\{\mathbb{P}^m\}$ straff. Nach Satz 2.14 gibt es eine konvergente Teilfolge. Es gibt aber höchstens einen Grenzwert $\mathbb{P}$, der (3.28) erfüllt. $\square$

Hilfssatz 3.59. Sei (E, r) vollständig und separabel und $A \subset (B(E))^2$. Nehmen wir an, dass es für jedes $\nu \in \mathcal{P}(E)$ eine Lösung des Martingalproblems für (A, ν) mit Pfaden in $\mathcal{D}_E[0, \infty)$ gibt. Sei Z ein Prozess mit Pfaden in $D_E[0, \infty)$ und τ eine $[0, \infty]$ -wertige Zufallsvariable. Nehmen wir an, dass für $(f, g) \in A$

$$\left\{ f(Z_{t \wedge \tau}) - \int_0^{t \wedge \tau} g(Z_s) ds \right\}$$

ein Martingal bezüglich $\mathcal{G}_t = \sigma(Z_{s \wedge \tau}, s \wedge \tau : s \leq t)$ ist. Falls τ diskret ist oder falls $\mathcal{D}(A) \subset \bar{\mathcal{C}}(E)$, dann gibt es eine Lösung Y des Martingalproblems für A mit Pfaden in $D_E[0, \infty)$ und eine $[0, \infty]$ -wertige Zufallsvariable η , so dass $(Y_{\cdot \wedge \eta}, \eta)$ die gleiche Verteilung hat wie $(Z_{\cdot \wedge \tau}, \tau)$.

Beweis. Sei $\mathbb{P}_1 \in \mathcal{P}(D_E[0, \infty) \times [0, \infty])$ die Verteilung von (Z, τ) und $\mu \in \mathcal{P}(E)$ die Verteilung von Z_τ (wir setzen $Z(\tau) = x_0$ auf $\{\tau = \infty\}$ für ein festes $x_0 \in E$). Sei $\mathbb{P}_2 \in \mathcal{P}(D_E[0, \infty))$ eine Lösung des Martingalproblems für (A, μ) . Nach Hilfssatz 3.58 gibt es ein $Q \in \mathcal{P}(D_E[0, \infty) \times [0, \infty] \times D_E[0, \infty))$, so dass für $B \in \mathcal{S}_E \times \mathfrak{B}[0, \infty]$ und $C \in \mathcal{S}_E$,

$$\begin{aligned} Q[B \times C] &= \int \mathbb{P}_1[(X, \eta) \in B \mid X_\eta = x] \mathbb{P}_2[X \in C \mid X_0 = x] d\mu(x) \\ &= \int \mathbb{P}[(Z, \tau) \in B \mid Z_\tau = x] \mathbb{P}_2[X \in C \mid X_0 = x] d\mu(x), \end{aligned} \quad (3.29)$$

wobei (X, η) die Variable auf $D_E[0, \infty) \times [0, \infty]$ bezeichnet. Sei (X_1, η, X_2) die Variable auf $D_E[0, \infty) \times [0, \infty] \times D_E[0, \infty)$. Definieren wir

$$Y_t = \begin{cases} X_1(t) & \text{für } t < \eta, \\ X_2(t - \eta) & \text{für } t \geq \eta. \end{cases}$$

Dann hat $(Y_{\cdot \wedge \eta}, \eta) = (X_1(\cdot \wedge \eta), \eta)$ die gleiche Verteilung wie $(Z(\cdot \wedge \tau), \tau)$. Wir müssen nur noch zeigen, dass Y eine Lösung des Martingalproblems für A ist.

Sei $(f, g) \in A$, $(h_k) \subset \bar{C}(E)$, $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$ und definieren wir

$$R_1 = \left(f(Y_{t_{n+1} \wedge \eta}) - f(Y_{t_n \wedge \eta}) - \int_{t_n \wedge \eta}^{t_{n+1} \wedge \eta} g(Y_s) \, ds \right) \prod_{k=1}^n h_k(Y_{t_k}),$$

$$R_2 = \left(f(Y_{t_{n+1} \vee \eta}) - f(Y_{t_n \vee \eta}) - \int_{t_n \vee \eta}^{t_{n+1} \vee \eta} g(Y_s) \, ds \right) \prod_{k=1}^n h_k(Y_{t_k})$$

und

$$R = \left(f(Y_{t_{n+1}}) - f(Y_{t_n}) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(Y_s) \, ds \right) \prod_{k=1}^n h_k(Y_{t_k}).$$

Dann haben wir $R = R_1 + R_2$. Wir bemerken, dass $R_1 = 0$ auf $\{\eta \leq t_n\}$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q[R_1] &= \mathbb{E}_Q \left[\left(f(Y_{t_{n+1} \wedge \eta}) - f(Y_{t_n \wedge \eta}) - \int_{t_n \wedge \eta}^{t_{n+1} \wedge \eta} g(Y_s) \, ds \right) \prod_{k=1}^n h_k(Y_{t_k \wedge \eta}) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_1} \left[\left(f(Y_{t_{n+1} \wedge \eta}) - f(Y_{t_n \wedge \eta}) - \int_{t_n \wedge \eta}^{t_{n+1} \wedge \eta} g(Y_s) \, ds \right) \prod_{k=1}^n h_k(Y_{t_k \wedge \eta}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(f(Z_{t_{n+1} \wedge \tau}) - f(Z_{t_n \wedge \tau}) - \int_{t_n \wedge \tau}^{t_{n+1} \wedge \tau} g(Z_s) \, ds \right) \prod_{k=1}^n h_k(Z_{t_k \wedge \tau}) \right] = 0. \end{aligned}$$

Nehmen wir zuerst $\mathcal{D}(A) \subset \bar{C}(E)$ an. Sei $\eta_m = \lfloor m\eta \rfloor / m$ ($\lfloor m\infty \rfloor / m = \infty$) und

$$\begin{aligned} R_2^m &= \left(f(X_2(t_{n+1} \vee \eta_m - \eta_m)) - f(X_2(t_n \vee \eta_m - \eta_m)) \right. \\ &\quad \left. - \int_{t_n \vee \eta_m}^{t_{n+1} \vee \eta_m} g(X_2(s - \eta_m)) \, ds \right) \prod_{t_k \geq \eta_m} h_k(X_2(t_k - \eta_m)) \prod_{t_k < \eta_m} h_k(X_1(t_k)). \end{aligned}$$

Da X_2 rechtsstetig und f stetig ist, konvergiert R_2^m nach R_2 . Wir bemerken, dass $R_2^m = 0$ auf $\{\eta_m \geq t_{n+1}\}$. Da X_2 eine Lösung des Martingalproblems ist, haben wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q[R_2^m] &= \sum_{l < mt_{n+1}} \mathbb{E}_Q[R_2^m \mathbb{1}_{\{\eta_m = l/m\}}] \\ &= \sum_{l < mt_{n+1}} \int \mathbb{E}_{\mathbb{P}_1} \left[\mathbb{1}_{\{\eta_m = l/m\}} \prod_{t_k < l/m} h_k(X_1(t_k)) \mid X_1(\eta) = x \right] \\ &\quad \times \mathbb{E}_{\mathbb{P}_2} \left[\left(f(X_2(t_{n+1} - l/m)) - f(X_2(t_n \vee l/m - l/m)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{t_n \vee l/m}^{t_{n+1}} g(X_2(s - l/m)) \, ds \right) \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{t_k \geq l/m} h_k(X_2(t_k - l/m)) \mid X_2(0) = x \right] d\mu(x) = 0. \end{aligned}$$

Lassen wir $m \rightarrow \infty$, erhalten wir $\mathbb{E}_Q[R_2] = 0$. Das gleiche Argument kann im diskreten Fall verwendet werden. Daher ist $\mathbb{E}_Q[R] = 0$. Das heisst, Y ist eine Lösung des Martingalproblems für A . $\square$

Hilfssatz 3.60. Sei (E, r) vollständig und separabel. Für $\varepsilon, T > 0$ sei $K_{\varepsilon, T} \subset E$ kompakt, und wir definieren $K_{\varepsilon, T}^* = \{x \in D_E[0, \infty) : x(t) \in K_{\varepsilon, T} \text{ für alle } t < T\}$. Ist $A \subset \bar{C}(E) \times B(E)$ und $\overline{\mathcal{D}(A)}$ enthält eine Algebra, die die Punkte trennt und nirgends verschwindet, dann ist

$$\{\mathbb{P} \in \mathcal{M}_A : \mathbb{P}[K_{\varepsilon, T}^*] \geq 1 - \varepsilon \text{ für alle } \varepsilon, T > 0\} \quad (3.30)$$

relativ kompakt. Ist zusätzlich $A \subset (\bar{C}(E))^2$, dann ist (3.30) kompakt.

Beweis. Nach der Definition von $K_{\varepsilon, T}^*$ und Satz 2.39 ist (3.30) genau dann relativ kompakt, falls $\{f \circ X_\alpha\}$ relativ kompakt ist für jedes $f \in \mathcal{D}(A)$, wobei X_α die Menge der Prozesse aus (3.30) ist. Nach Satz 2.42 ist $\{f \circ X_\alpha\}$ relativ kompakt.

Ist $A \subset (\bar{C}(E))^2$ und $A_n = A$, so folgt aus Hilfssatz 3.50, dass für jede konvergente Folge $\{\mathbb{P}_n\}$ aus (3.30) der Grenzwert $\mathbb{P}$ in $\mathcal{M}_A$ ist. Da $\mathbb{P}[K_{\varepsilon, T}^*] \geq \overline{\lim} \mathbb{P}_n[K_{\varepsilon, T}^*] \geq 1 - \varepsilon$, folgt dass auch $\mathbb{P}$ in (3.30) ist. $\square$

Um die Bedingungen $C_1 - C_5$ zu motivieren, beweisen wir folgenden

Satz 3.61. Sei (E, r) vollständig und separabel.

- i) Sei $A \subset (B(E))^2$, $\Gamma = \mathcal{M}_A$ und $\mathcal{T}$ die positiven Konstanten. Nehmen wir an, dass $\Gamma_\nu \neq \emptyset$ für alle $\nu \in \mathcal{P}(E)$. Dann sind $C_1 - C_3$ erfüllt.
- ii) Sei $A \subset (\bar{C}(E))^2$, $\Gamma = \mathcal{M}_A$ und $\mathcal{T} = \{\tau : \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t^X \text{ für alle } t \geq 0, \tau \text{ beschränkt}\}$. Nehmen wir an, dass $\overline{\mathcal{D}(A)}$ eine Algebra enthält, die die Punkte trennt und nirgends verschwindet, und dass es für jedes kompakte $K \subset E$, $\varepsilon > 0$ und $T > 0$ eine kompakte Menge $K' \subset E$ gibt, so dass

$$\mathbb{P}[X_t \in K' \text{ für alle } t < T, X_0 \in K] \geq (1 - \varepsilon)\mathbb{P}[X_0 \in K] \quad \text{für alle } P \in \Gamma. \quad (3.31)$$

Dann sind $C_1 - C_5$, C'_2 und C'_5 erfüllt.

- iii) Zusätzlich zu den Bedingungen von ii) sei das $D_E[0, \infty)$ -Martingalproblem wohlgestellt. Dann sind die Lösungen Markov Prozesse, die eine Halbgruppe auf $\bar{C}(E)$ erzeugen.

Beweis. i): C_1 Dies folgt direkt aus dem Beweis von Hilfssatz 3.59, wobei $\hat{Q}$ das Mass Q ist, das in (3.29) erzeugt wurde.

i): C_2 Sei $\mathbb{P} \in \Gamma$, $\tau \in \mathcal{T}$ und $H \geq 0$ und $\mathcal{F}_\tau$ -messbar mit $0 < \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H] < \infty$. Definieren wir Q durch (3.26). Für $(f, g) \in A$, $(h_k) \subset B(E)$ und $t_1 < t_2 \cdots < t_{n+1}$ haben wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q & \left[\left(f(X_{t_{n+1}}) - f(X_{t_n}) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(X_s) \, ds \right) \prod_{k=1}^n h_k(X_{t_k}) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H]^{-1} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[H \left(f(X_{\tau+t_{n+1}}) - f(X_{\tau+t_n}) - \int_{\tau+t_n}^{\tau+t_{n+1}} g(X_s) \, ds \right) \prod_{k=1}^n h_k(X_{\tau+t_k}) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist $Q \in \Gamma$.

i): C_3 Dies folgt leicht.

ii): $C_1 - C_3$ Diese Bedingungen folgen ähnlich wie in i).

ii): C'_2 Dies folgt aus Hilfssatz 3.55.

ii): C'_5 Sei $V \subset \mathcal{P}(E)$ kompakt. Dann folgt aus Satz 2.14, dass es für $0 < \varepsilon < 1$ und $T > 0$ eine kompakte Menge $K \subset E$ gibt, so dass $\nu(K) > 1 - \varepsilon/2$ für alle $\nu \in V$. Nach (3.31) gibt es eine Menge $K_{\varepsilon, T}$, so dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_t \in K_{\varepsilon, T} \text{ für alle } t < T] &\geq \mathbb{P}[X_t \in K_{\varepsilon, T} \text{ für alle } t < T, X_0 \in K] \\ &\geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \mathbb{P}[X_0 \in K] \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \geq 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $\mathbb{P} \in \bigcup_{\nu \in V} \Gamma_\nu$. Die Behauptung folgt nun aus Hilfssatz 3.60.

ii): $C_4 - C_5$ Dies folgt aus Hilfssatz 3.57, C'_2 und C'_5 .

iii) Sei $\mathbb{P}_x$ die Lösung des $D_E[0, \infty)$ -Martingalproblems für (A, δ_x) . Wegen der Eindeutigkeit folgt aus Korollar 3.40, dass die Lösungen Markovsch sind. Sei $T(t)f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)]$. Nach Satz 3.35 gilt $\mathbb{P}_x[X_t = X_{t-}] = 1$ für alle t . Sei $\{x_n\} \subset E$, $x \in E$, so dass $x_n \rightarrow x$. Aus C'_5 folgt, dass es eine konvergente Teilfolge von $\mathbb{P}_{x_n}$ gibt. Wegen der Eindeutigkeit muss der Grenzwert $\mathbb{P}_x$ sein. Daher gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{x_n}[f(X_t)] = \mathbb{E}_x[f(X_t)]$$

für jedes $f \in \bar{C}(E)$. Daher gilt $T(t)f \in \bar{C}(E)$. $\square$

Hilfssatz 3.62. Sei (E, r) vollständig und $A \subset \bar{C}(E) \times B(E)$. Nehmen wir an, für jedes kompakte $K \subset E$ und $\eta > 0$ gibt es eine Folge von kompakten $K_n \subset E$, $K \subset K_n$ und $(f_n, g_n) \in A$, so dass für $F_n = \{z : \inf_{x \in K_n} r(x, z) \leq \eta\}$ gilt, dass

$$\beta_{n, \eta} = \inf_{y \in K} f_n(y) - \sup_{y \in E \setminus F_n} f_n(y) > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{n,\eta}^{-1} \sup_{y \in F_n} g_n^-(y) = 0$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{n,\eta}^{-1} (\|f_n\| - \inf_{y \in K} f_n(y)) = 0.$$

Dann gibt es für jedes kompakte $K \subset E$, $\varepsilon > 0$ und $T > 0$ eine kompakte Menge $K' \subset E$, so dass

$$\mathbb{P}[X_t \in K' \text{ für alle } t < T, X_0 \in K] \geq (1 - \varepsilon) \mathbb{P}[X_0 \in K]$$

für alle $\mathbb{P} \in \mathcal{M}_A$.

Beweis. Für festes $T > 0$, $K \subset E$ kompakt und $\eta > 0$ definieren wir $\tau_n = 0$ falls $X_0 \notin K$ und $\tau_n = \inf\{t : X_t \notin F_n\}$, falls $X_0 \in K$. Dann gilt für $\mathbb{P} \in \mathcal{M}_A$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_n(X_0) - f_n(X_{\tau_n \wedge T})] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\int_0^{\tau_n \wedge T} g_n(X_s) \, ds\right]$$

und damit

$$\begin{aligned} \beta_{n,\eta} \mathbb{P}[0 < \tau_n \leq T] &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(f_n(X_0) - f_n(X_{\tau_n})) \mathbb{1}_{\{0 < \tau_n \leq T\}}] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[-\int_0^{\tau_n \wedge T} g_n(X_s) \, ds\right] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(f_n(X_T) - f_n(X_0)) \mathbb{1}_{\tau_n > T}] \\ &\leq \mathbb{P}[X_0 \in K] \left(T \sup_{y \in F_n} g_n^-(y) + \|f_n\| - \inf_{y \in K} f_n(y)\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_t \in F_n \text{ für alle } t \leq T, X_0 \in K] &= \mathbb{P}[X_0 \in K] - \mathbb{P}[0 < \tau_n \leq T] \\ &\geq \mathbb{P}[X_0 \in K] \left(1 - \beta_{n,\eta}^{-1} \left(T \sup_{y \in F_n} g_n^-(y) + \|f_n\| - \inf_{y \in K} f_n(y)\right)\right). \end{aligned}$$

Daher gibt es für jedes $m > 0$ ein kompaktes $\hat{K}_m \subset E$, so dass

$$\mathbb{P}[X_t \in \hat{K}_m^{1/m} \text{ für alle } t \leq T, X_0 \in K] \geq \mathbb{P}[X_0 \in K] (1 - \varepsilon 2^{-m}).$$

Die Aussage folgt nun für K' gewählt als den Abschluss von $\bigcap_m \hat{K}_m^{1/m}$. □

Beispiel 3.63. Sei $E = \mathbb{R}^d$ und für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ setzen wir

$$Af = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{i,j} \partial_i \partial_j f + \sum_i b_i \partial_i f,$$

wobei $a_{i,j}$ und b_i messbare Funktionen sind, mit $|a_{i,j}(x)| \leq M(1 + |x|^2)$ und $b_i(x) \leq M(1 + |x|)$ für ein $M > 0$. Für kompaktes $K \subset B(0, k)$ und $\eta > 0$ sei $K_n = \overline{B(0, k + n)}$ und $f_n \in \mathcal{D}(A)$ erfülle

$$f_n(x) = 1 + \log(1 + (k + n + \eta)^2) - \log(1 + |x|^2)$$

für $|x| \leq k + n + \eta$ und $0 \leq f_n(x) \leq 1$ für $|x| > k + n + \eta$. Somit ist $\beta_{n,\eta} \geq \log(1 + (k + n + \eta)^2) - \log(1 + k^2)$. Weiter haben wir $|\partial_i \partial_j f_n(x)| \leq 4(1 + |x|^2)^{-1}$ für $x \in F_n$. Daraus folgt

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{i,j} \partial_i \partial_j f(x) \right| \leq 2d^2 M$$

für alle $x \in F_n$. Weiter haben wir $|\partial_i f_n(x)| = 2|x_i|(1 + |x|^2)^{-1} \leq 2|x|(1 + |x|^2)^{-1}$ für $x \in F_n$ und damit

$$\left| \sum_i b_i \partial_i f_n(x) \right| \leq 4dM$$

für $x \in F_n$. Damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{n,\eta}^{-1} \sup_{y \in F_n} g_n^-(y) = 0.$$

Wir bemerken, dass $\|f_n\| - \inf_{y \in K} f_n(y) \leq \log(1 + k^2)$. Also gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{n,\eta}^{-1} (\|f_n\| - \inf_{y \in K} f_n(y)) = 0.$$

■

Hilfssatz 3.64. Sei $\Gamma \subset \mathcal{P}(D_E[0, \infty))$ und $\mathcal{T}$, so dass C_2 erfüllt ist. Sei $u, h \in B(E)$ und nehmen wir an, dass

$$\gamma(\Gamma_\nu, h) = \int u(x) d\nu = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty e^{-t} h(X_t) dt \right]$$

für alle $\nu \in \mathcal{P}(E)$ und $\mathbb{P} \in \Gamma_\nu$. Dann ist für jedes $\mathbb{P} \in \Gamma$

$$\left\{ u(X_t) - \int_0^t (u(X_s) - h(X_s)) ds \right\}$$

ein $\{\mathcal{F}_t\}$ -Martingal.

Beweis. Sei $\mathbb{P} \in \Gamma$, $t \geq 0$, $B \in \mathcal{F}_t$ mit $\mathbb{P}[B] > 0$, $\nu(C) = \mathbb{P}[X_t \in C \mid B]$ für alle $C \in \mathfrak{B}(E)$ und $H = \mathbb{1}_B$. Dann gilt mit Q gegeben durch (3.26)

$$\begin{aligned} e^t \int_B \int_t^\infty e^{-u} h(X_u) du d\mathbb{P} &= \int_B \int_0^\infty e^{-s} h(X_{t+s}) ds d\mathbb{P} = \mathbb{P}[B] \mathbb{E}_Q \left[\int_0^\infty e^{-s} h(X_s) ds \right] \\ &= \mathbb{P}[B] \int u(x) d\nu = \int_B u(X_t) d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Da B beliebig war, gilt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty e^{-s} h(X_s) \, ds \mid \mathcal{F}_t \right] = e^{-t} u(X_t) + \int_0^t e^{-s} h(X_s) \, ds.$$

Die linke Seite ist ein Martingal. Die Aussage folgt nun aus Hilfssatz 3.26. $\square$

Satz 3.65. Sei (E, r) vollständig und separabel. Sei $\mathcal{T}$ eine Menge von positiven Borel-messbaren Funktionen auf $D_E[0, \infty)$, die alle positiven Konstanten enthält, und $\{\mathcal{F}_t\}$ sei durch (3.24) gegeben. Sei $\Gamma \subset \mathcal{P}(D_E[0, \infty))$ und nehmen wir $\Gamma_\nu \neq \emptyset$ für alle $\nu \in \mathcal{P}(E)$ an. Sei A_0 die Menge der $(f, g) \in (B(E))^2$, so dass

$$\left\{ f(X_t) - \int_0^t g(X_s) \, ds \right\} \quad (3.32)$$

ein $\{\mathcal{F}_t\}$ -Martingal ist für alle $\mathbb{P} \in \Gamma$. Unter der Annahme von $C_1 - C_5$ gelten folgende Aussagen:

- i) Es gibt einen linearen dissipativen Operator $A \supset A_0$, so dass $\mathcal{R}(I - A) = B(E)$ (und damit $\mathcal{R}(\lambda - A) = B(E)$ für alle $\lambda > 0$) und für jedes $f \in B(E)$ gibt es eine beschränkte Folge $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(A)$, die punktweise nach f konvergiert.
- ii) Entweder besteht Γ_ν aus einem Element für alle ν oder es gibt mehrere Erweiterungen von A_0 .
- iii) Für jedes $\nu \in \mathcal{P}(E)$ existiert $\mathbb{P}_\nu \in \Gamma_\nu$, welches die eindeutige (und daher Markov'sche) Lösung des Martingalproblems für (A, ν) ist. Ist $\mathbb{P}_x$ die eindeutige Lösung des Martingalproblems für (A, δ_x) , dann ist $x \mapsto \mathbb{P}_x$ messbar und $\mathbb{P}_\nu = \int \mathbb{P}_x \, d\nu(x)$.
- iv) Jede Lösung $\mathbb{P}$ des Martingalproblems für A erfüllt

$$\mathbb{P}[X_{\tau+} \in C \mid \mathcal{F}_\tau] = \mathbb{P}_{X_\tau}[C]$$

für jedes $C \in \mathcal{S}_E$ und $\tau \in \mathcal{T}$.

Beweis. Seien $\{f_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \bar{C}(E)$ positiv und nehmen wir an, dass es für jedes $f \in B(E)$ eine beschränkte Folge $\{g_k\}$ im linearen Raum aufgespannt durch $\{f_n\}$ gibt, so dass $\{g_k\}$ punktweise nach f konvergiert. So eine Folge gibt es nach Proposition 2.19. Sei $\Gamma^{(0)} = \Gamma$ und $\Gamma_\nu^{(0)} = \Gamma_\nu$. Definieren wir

$$\Gamma_\nu^{(k+1)} = \left\{ \mathbb{P} \in \Gamma_\nu^{(k)} : \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) \, dt \right] = \gamma(\Gamma_\nu^{(k)}, f_{k+1}) \right\}$$

für alle $\nu \in \mathcal{P}(E)$. Wir setzen $\Gamma^{(k)} = \bigcup \Gamma_\nu^{(k)}$.

Wir zeigen zuerst durch Induktion, dass $\Gamma_\nu^{(k)} \neq \emptyset$, und dass $C_1 - C_5$ für alle $\Gamma_\nu^{(k)}$ erfüllt sind. Wir bezeichnen nun mit $C_i^{(k)}$ die Bedingung C_i für $\Gamma_\nu^{(k)}$. Nehmen wir also an, dass $\Gamma_\nu^{(k)} \neq \emptyset$ und dass $C_1^{(k)} - C_5^{(k)}$ gilt. Wegen C_5 ist $\Gamma_\nu^{(k)}$ kompakt. Da die Abbildung $\mathcal{P}(D_E[0, \infty)) \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{P} \mapsto \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) dt]$ stetig ist, folgt, dass $\Gamma_\nu^{(k+1)} \neq \emptyset$, und dass $\Gamma_\nu^{(k+1)}$ (die Menge der Punkte, die auf $\{\gamma(\Gamma_n u^{(k)})\}$ abgebildet werden), auch kompakt ist. Somit gilt $C_5^{(k+1)}$. Sei $\mathbb{P} \in \Gamma_\nu^{(k+1)}$ und $B \in \mathfrak{B}(E)$ mit $0 < \nu(B) < 1$. Definieren wir $\mu_1(\cdot) = \nu(B \cap \cdot)/\nu(B)$ und $\mu_2(\cdot) = \nu(B^c \cap \cdot)/\nu(B^c)$. $C_2^{(k)}$ impliziert, dass für Q_1 , erhalten durch $H_1 = \mathbb{1}_B(X_0)$, und Q_2 , erhalten durch $H_2 = \mathbb{1}_{B^c}(X_0)$,

$$\begin{aligned} \gamma(\Gamma_\nu^{(k)}, f_{k+1}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\mathbb{1}_B(X_0) \int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) dt \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\mathbb{1}_{B^c}(X_0) \int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) dt \right] \\ &= \nu(B) \mathbb{E}_{Q_1} \left[\int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) dt \right] + \nu(B^c) \mathbb{E}_{Q_2} \left[\int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) dt \right] \\ &\leq \nu(B) \gamma(\Gamma_{\mu_1}^{(k)}, f_{k+1}) + \nu(B^c) \gamma(\Gamma_{\mu_2}^{(k)}, f_{k+1}) \end{aligned}$$

gilt. Nach den Hilfssätzen 3.55 und 3.57 muss Gleichheit gelten. Wegen $C_4^{(k)}$ gibt es ein $u_{k+1} \in B(E)$, so dass

$$\gamma(\Gamma_\nu^{(k)}, f_{k+1}) = \int u_{k+1} d\nu$$

für jedes ν . Daher gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\mathbb{1}_B(X_0) \int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) dt \right] &= \nu(B) \gamma(\Gamma_{\mu_1}^{(k)}, f_{k+1}) = \nu(B) \int u_{k+1} d\mu_1 \\ &= \int_B u_{k+1} d\nu \end{aligned}$$

und

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) dt \mid X_0 = x \right] = u_{k+1}(x) \quad (3.33)$$

ν -f.s. folgt.

Wir zeigen jetzt $C_1^{(k+1)}$. Sei $\mathbb{P} \in \Gamma_\nu^{(k+1)}$, $\tau \in \mathcal{T}$, μ die Verteilung von X_τ unter $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}' \in \Gamma_\mu^{(k+1)}$. Dann gibt es wegen $C_1^{(k)}$ ein $\hat{Q}$ mit Randverteilung $Q \in \Gamma_\nu^{(k)}$, so dass (3.25) gilt. Wir müssen zeigen, dass $Q \in \Gamma_\nu^{(k+1)}$. Sei $d\mu^*(x) = (\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{-\tau} \mid X_\tau =$

$x]/\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{-\tau}]) \, d\mu(x)$. Dann folgt mit Hilfe von (3.25) und (3.33), dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q \left[\int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) \, dt \right] &= \mathbb{E}_{\hat{Q}} \left[\int_0^\eta e^{-t} f_{k+1}(X_t) \, dt \right] + \mathbb{E}_{\hat{Q}} \left[e^{-\eta} \int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_{\eta+t}) \, dt \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\tau e^{-t} f_{k+1}(X_t) \, dt \right] + \int \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{-\tau} \mid X_\tau = x] \\
&\quad \times \mathbb{E}_{\mathbb{P}'} \left[\int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) \, dt \mid X_0 = x \right] d\mu(x) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\tau e^{-t} f_{k+1}(X_t) \, dt \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{-\tau}] \int u_{k+1}(x) \, d\mu^*(x) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\tau e^{-t} f_{k+1}(X_t) \, dt \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{-\tau}] \gamma(\Gamma_{\mu^*}^{(k)} f_{k+1}).
\end{aligned}$$

Wegen $C_2^{(k)}$ gibt es ein $\mathbb{P}'' \in \Gamma_{\mu^*}^{(k)}$, so dass

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}''} \left[\int_0^\infty e^{-t} f(X_t) \, dt \right] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{-\tau} \int_0^\infty e^{-t} f(X_{\tau+t}) \, dt]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{-\tau}]}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\gamma(\Gamma_\nu^{(k)}, f_{k+1}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) \, dt \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\tau e^{-t} f_{k+1}(X_t) \, dt \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{-\tau} \int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_{\tau+t}) \, dt \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\tau e^{-t} f_{k+1}(X_t) \, dt \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{-\tau}] \mathbb{E}_{\mathbb{P}''} \left[\int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) \, dt \right] \\
&\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\tau e^{-t} f_{k+1}(X_t) \, dt \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{-\tau}] \gamma(\Gamma_{\mu^*}^{(k)} f_{k+1}) \\
&= \mathbb{E}_Q \left[\int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) \, dt \right] \leq \gamma(\Gamma_\nu^{(k)}, f_{k+1}).
\end{aligned}$$

Damit muss Gleichheit gelten, und $Q \in \Gamma_\nu^{(k+1)}$.

Als nächstes zeigen wir $C_2^{(k+1)}$. Sei $\mathbb{P} \in \Gamma^{(k+1)}$ und $\tau \in \mathcal{T}$, und wir definieren μ^* wie oben. Dann gilt für $B \in \mathcal{F}_\tau$ mit $0 < \mathbb{P}[B] < 1$, wobei wir $C_2^{(k)}$ verwenden, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{-\tau}] \gamma(\Gamma_{\mu^*}^{(k)}, f_{k+1}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_\tau^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) \, dt \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\mathbb{1}_B e^{-\tau} \int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_{\tau+t}) \, dt \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\mathbb{1}_{B^c} e^{-\tau} \int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_{\tau+t}) \, dt \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_B e^{-\tau}] \mathbb{E}_{Q_1} \left[\int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) \, dt \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_{B^c} e^{-\tau}] \mathbb{E}_{Q_2} \left[\int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) \, dt \right] \\
&\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_B e^{-\tau}] \gamma(\Gamma_{\mu_1^*}^{(k)}, f_{k+1}) + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_{B^c} e^{-\tau}] \gamma(\Gamma_{\mu_2^*}^{(k)}, f_{k+1}),
\end{aligned}$$

wobei Q_1 und Q_2 die Masse sind, die durch $C_2^{(k)}$ mit Randverteilung μ_1^* und μ_2^* für X_0 gegeben sind. Die Hilfssätze 3.55 und 3.57 implizieren, dass Gleichheit gelten muss. Daher haben wir

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\mathbb{1}_B e^{-\tau} \int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_{\tau+t}) dt \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbb{1}_B e^{-\tau}] \int u_{k+1} d\mu_1^* = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbb{1}_B e^{-\tau} u_{k+1}(X_\tau)] ,$$

woraus

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_{\tau+t}) dt \mid \mathcal{F}_\tau \right] = u_{k+1}(X_\tau)$$

folgt. Sei nun $H \geq 0$ $\mathcal{F}_\tau$ -messbar mit $0 < \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H] < \infty$ und sei Q das Mass, das durch (3.26) definiert wird. Dann ist $Q \in \Gamma^{(k)}$. Sei ν die Randverteilung von X_0 . Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q \left[\int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) dt \right] &= \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [H \int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_{\tau+t}) dt]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [H]} \\ &= \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [H \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_{\tau+t}) dt \mid \mathcal{F}_\tau]]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [H]} \\ &= \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [H u_{k+1}(X_\tau)]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [H]} = \mathbb{E}_Q [u_{k+1}(X_0)] = \int u_{k+1} d\nu \\ &= \gamma(\Gamma_\nu^{(k)}, f_{k+1}) . \end{aligned}$$

Also gilt $Q \in \Gamma^{(k+1)}$.

Wir zeigen nun $C_3^{(k+1)}$. Nach den Hilfssätzen 3.55 und 3.57 gilt

$$\gamma(\Gamma_{\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2}^{(k)}, f_{k+1}) = \alpha\gamma(\Gamma_{\mu_1}^{(k)}, f_{k+1}) + (1-\alpha)\gamma(\Gamma_{\mu_2}^{(k)}, f_{k+1}) .$$

Sind also $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in \Gamma^{(k+1)}$, dann ist auch $\alpha\mathbb{P}_1 + (1-\alpha)\mathbb{P}_2 \in \Gamma^{(k+1)}$.

Schliesslich zeigen wir $C_4^{(k+1)}$. Sei $h \in \bar{C}(E)$ mit $h \geq 0$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $v_\varepsilon \in B(E)$, so dass

$$\gamma(\Gamma_\nu^{(k)}, f_{k+1} + \varepsilon h) = \int v_\varepsilon d\nu$$

für alle $\nu \in \mathcal{P}(E)$. Wir bemerken, dass für $\mathbb{P} \in \Gamma_\nu^{(k+1)}$

$$\begin{aligned} \int v_\varepsilon d\nu &\geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) dt \right] + \varepsilon \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty e^{-t} h(X_t) dt \right] \\ &= \int u_{k+1} d\nu + \varepsilon \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty e^{-t} h(X_t) dt \right] . \end{aligned}$$

Da $\mathbb{P}$ beliebig war, gilt

$$\int v_\varepsilon d\nu \geq \int u_{k+1} d\nu + \varepsilon \gamma(\Gamma_\nu^{(k+1)}, h) .$$

Für $\nu = \delta_x$ folgt $\nu_\varepsilon(x) \geq u_{k+1}(x)$ und

$$\underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1}(v_\varepsilon(x) - u_{k+1}(x)) \geq \gamma(\Gamma_{\delta_x}^{(k+1)}, h).$$

Für $\varepsilon > 0$ wählen wir $\mathbb{P}_\varepsilon \in \Gamma_\nu^{(k)}$, so dass

$$\int v_\varepsilon \, d\nu = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\varepsilon} \left[\int_0^\infty e^{-t} (f_{k+1}(X_t) + \varepsilon h(X_t)) \, dt \right].$$

Da $v_\varepsilon \geq u_{k+1}$, folgt dass $\underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int v_\varepsilon \, d\nu \geq \int u_{k+1} \, d\nu$ und

$$\int v_\varepsilon \, d\nu \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\varepsilon} \left[\int_0^\infty e^{-t} f_{k+1}(X_t) \, dt \right] + \varepsilon \|h\| \leq \int u_{k+1} \, d\nu + \varepsilon \|h\|.$$

Also haben wir $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int v_\varepsilon \, d\nu = \int u_{k+1} \, d\nu$. Also ist jeder Grenzwert von $\{\mathbb{P}_\varepsilon\}$ in $\Gamma_\nu^{(k+1)}$. Das bedeutet,

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \varepsilon^{-1}(v_\varepsilon - u_{k+1}) \, d\nu \leq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_\varepsilon} \left[\int_0^\infty e^{-t} h(X_t) \, dt \right] \leq \gamma(\Gamma_\nu^{(k+1)}, h).$$

Insbesondere gilt

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1}(v_\varepsilon(x) - u_{k+1}(x)) \leq \gamma(\Gamma_{\delta_x}^{(k+1)}, h).$$

Also ist die Funktion

$$v(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1}(v_\varepsilon(x) - u_{k+1}(x)) = \gamma(\Gamma_{\delta_x}^{(k+1)}, h)$$

messbar. Wir haben dann

$$\gamma(\Gamma_\nu^{(k+1)}, h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \varepsilon^{-1}(v_\varepsilon - u_{k+1}) \, d\nu = \int v \, d\nu,$$

da $0 \leq \varepsilon^{-1}(v_\varepsilon - u_{k+1}) \leq \|h\|$, und damit gilt $C_4^{(k+1)}$.

Wir setzen nun $\Gamma^{(\infty)} = \bigcap \Gamma^{(k)}$. Da Γ_ν kompakt und nicht leer ist, und $\Gamma_\nu^{(k+1)} \subset \Gamma_\nu^{(k)}$ kompakt ist, ist auch $\Gamma_\nu^{(\infty)}$ nicht leer. Nach Hilfssatz 3.64 ist

$$u_k(X_t) - \int_0^t (u_k(X_s) - f_k(X_s)) \, ds$$

ein Martingal für alle $k \geq 1$ und $P \in \Gamma^{(k)}$, und damit für alle $\mathbb{P} \in \Gamma^{(\infty)}$. Sei

$$A = \left\{ (f, g) \in (B(E))^2 : (3.32) \text{ ist ein } \{\mathcal{F}_t\}\text{-Martingal für alle } \mathbb{P} \in \Gamma^{(\infty)} \right\}.$$

Dann ist $A_0 \subset A$, und da $(u_k, u_k - f_k) \in A$, folgt dass $\mathcal{R}(I - A)$ den linearen Raum enthält, der von $\{f_k\}$ aufgespannt wird. Nach der Konstruktion der $\{f_k\}$

ist also $\mathcal{R}(I - A) = B(E)$. Nach Proposition 3.29 ist A dissipativ, und damit gilt nach Hilfssatz 1.16, dass $\mathcal{R}(\lambda - A) = B(E)$ für alle $\lambda > 0$. Sei $\mathbb{P} \in \Gamma_{\delta_x}^{(\infty)}$. Nach Hilfssatz 3.26 haben wir

$$f(x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} (\lambda f(X_t) - A f(X_t)) dt \right]$$

für alle $f \in \mathcal{D}(A)$. Für $h \in B(E)$ und $f = (\lambda - A)^{-1}h$ ergibt dies

$$(\lambda - A)^{-1}h(x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} h(X_t) dt \right].$$

Dies ist eine Laplace-Transformierte. Da X rechtsstetig ist, folgt dass

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(\lambda - A)^{-1}h(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} h(X_t) dt \right] = h(x)$$

für jedes $h \in \bar{C}(E)$. Da der Operator dissipativ ist, haben wir $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}h\| \leq \|h\|$. Somit kann jedes $h \in \bar{C}(E)$ und damit jedes $h \in B(E)$ als der punktweise Grenzwert einer beschränkten Folge aus $\mathcal{D}(A)$ erhalten werden.

Nach Korollar 3.41 hat das $D_E[0, \infty)$ -Martingalproblem für (A, ν) höchstens eine Lösung. Da $\Gamma_\nu^{(\infty)} \neq \emptyset$ hat es genau eine Lösung. Besteht Γ_ν aus mehreren Elementen für ein $\nu \in \mathcal{P}(E)$, dann gibt es $\mathbb{P}, \mathbb{P}' \in \Gamma_\nu$ und $k > 0$, so dass

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^\infty e^{-t} f_k(X_t) dt \right] \neq \mathbb{E}_{\mathbb{P}'} \left[\int_0^\infty e^{-t} f_k(X_t) dt \right].$$

Sonst wären $\mathbb{P}, \mathbb{P}' \in \Gamma_\nu^{(\infty)}$ und das Martingalproblem für (A, ν) wäre nicht eindeutig. Ersetzen wir $\{f_m\}$ durch $\{\|f_m\| - f_m\}$, so erhalten wir damit eine andere Folge $\{\hat{\Gamma}_\nu^{(k)}\}$, für die $\hat{\Gamma}_\nu^{(\infty)} \cap \Gamma_\nu^{(\infty)} = \emptyset$ gilt. Da das $D_E[0, \infty)$ -Martingalproblem eindeutig ist, folgt $A \neq \hat{A}$.

Es folgt aus Korollar 3.40, dass jede Lösung des Martingalproblems Markov'sch ist. Die Halbgruppe $\{T(t)\}$ (definiert auf $\mathcal{D}(A)$), die durch A erzeugt wird, kann dargestellt werden als

$$T(t)f(x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_x}[f(X_t)].$$

Mittels beschränkter Konvergenz folgt, dass $\{T(t)\}$ zu einer Halbgruppe auf $B(E)$ erweitert werden kann. Somit ist $P(t, x, B) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_x}[\mathbb{1}_B(X_t)]$ eine Übergangsfunktion, und nach Proposition 3.4 ist $\mathbb{P}_x(B)$ eine Borel-messbare Funktion in x für alle $B \in \mathcal{S}_E$. Für jedes $\nu \in \mathcal{P}(E)$ ist das Mass

$$\mathbb{P}_\nu = \int \mathbb{P}_x d\nu(x)$$

eine Lösung des Martingalproblems für (A, ν) . Damit ist es das einzige Element von $\Gamma_\nu^{(\infty)}$.

Sei $\mathbb{P} \in \Gamma^{(\infty)}$, $\tau \in \mathcal{T}$ und $H \geq 0$ $\mathcal{F}_\tau$ -messbar mit $0 < \mathbb{E}_\mathbb{P}[H] < \infty$. Nach $C_2^{(k)}$ ist das Mass Q definiert durch (3.26) in $\Gamma^{(k)}$ für alle k , also ist $C_2^{(\infty)}$ erfüllt. Sei $B \in \mathcal{F}_\tau$ mit $\mathbb{P}[B] > 0$ und $\mu(D) = \mathbb{E}_\mathbb{P}[\mathbb{1}_B \mathbb{1}_D(X_\tau)] / \mathbb{P}[B]$ für $D \in \mathfrak{B}(E)$. Da $\Gamma_\nu^{(\infty)}$ aus nur einem Punkt besteht, folgt

$$\frac{\mathbb{E}_\mathbb{P}[\mathbb{1}_B \mathbb{1}_C(X_{\tau+})]}{\mathbb{P}[B]} = \int \mathbb{P}_x[C] \, d\mu(x)$$

für alle $C \in \mathcal{S}_E$, oder äquivalent dazu

$$\mathbb{E}_\mathbb{P}[\mathbb{1}_B \mathbb{1}_C(X_{\tau+})] = \int_B \mathbb{P}_{X_\tau}[C] \, d\mathbb{P}.$$

Daher ist

$$\mathbb{P}[X_{\tau+} \in C \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{P}_{X_\tau}[C]$$

erfüllt. □

Literatur

- [1] **Ethier, S.N. and Kurtz, T.G.** (1986). *Markov processes*. Wiley, New York.
- [2] **Feller, W.** (1971). *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Volume II, Wiley, New York.

Index

- $D_S[0, \infty)$, 41
- R_λ , 10
- $\bar{A}$, 20
- $\rho(A)$, 10
- abgeschlossener Operator, 7
- abschliessbar, 18
- Abschluss, 18, 20
- Bildbereich, 7, 20
- Definitionsbereich, 7, 20
- differenzierbar, 7
- dissipativ, 12, 20
- einwertig, 20
- Exponential eines Operators, 6
- Feller Halbgruppe, 65
- Feller Prozess, 65
- Feynman–Kac Formel, 3
- Generator
 - infinitesimal, 9
- Graph, 7
- Halbgruppe, 6
 - positiv, 64
- Hille–Yosida
 - Satz von, 14
- infinitesimale Generator, 9
- integrierbar, 7
- Kern, 20
- konservativer Operator, 65
- Kontraktionshalbgruppe, 6
- linear, 20
- Markov Prozess, 58
- Martingalproblem, 72
 - Eindeutigkeit, 81
 - wohlgestellt, 81
- Maximumsprinzip
 - positiv, 64
- mehrwertiger Operator, 20
- messbare Halbgruppe, 22
- Operator
 - konservativ, 65
- positive Halbgruppe, 64
- positiver Operator, 64
- positives Maximumsprinzip, 64
- Prozess
 - stationär, 115
- punkttrennend, 40
- Resolvente, 10
- Resolventenmenge, 10
- Satz von Hille–Yosida, 14
- schwache Konvergenz, 37
- stark Markov, 60
- stark Markov in τ , 60
- stark stetig, 6
- stationäre Verteilung, 115
- stationärer Prozess, 115
- straff
 - Mass, 35
 - Menge, 35
- trennende Menge, 40
- Uebergangskern, 58
- Verteilung
 - stationär, 115
- vollständiger Generator, 22
- Yosida-Approximation, 13