Klausur 16.7.2015

1. Seien in einem Markt n Agenten mit Anfangskapital $w_i > 1$ und Risiken X_i. Die Risiken seien durch $0 \le X_i \le 1$ beschränkt. Die Agenten haben logarithmische Nutzenfunktionen $u_i(z) = \log(c_i + z)$ für ein $c_i > 0$. Bestimmen Sie alle Pareto-optimalen Risikoteilungen.

2. Sei Θ_i $\Gamma(\gamma, \alpha)$ verteilt. Gegeben Θ_i sei Y_{ij} bedingt exponentialverteilt mit Parameter Θ_i, d.h. mit Mittelwert Θ_i^{-1}.

a) Finden Sie die (unbedingte) Verteilung von Y_{ij} und ihren Erwartungswert.

b) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von Θ_i und $Y_{i1}, Y_{i,2}, \cdots, Y_{im}$. Sei weiter

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} Y_{ij}$$

der mittlere Schaden über die letzten m Jahre. Zeigen Sie, dass Θ_i, bedingt auf $\{Y_{i1}, Y_{i,2}, \ldots, Y_{im}\}$, $\Gamma(\gamma + m, \alpha + m\bar{Y}_i)$-verteilt ist.

c) Bestimmen Sie den Bayes'schen Kredibilitätsschätzer.

d) Sei $\gamma \in (0, 1]$. Was fällt für den bedingten Erwartungswert für $Y_{i(m+1)}$ im Vergleich zum unbedingten Erwartungswert von Y_1 auf?

3. Betrachten wir ein klassisches Risikomodell mit Zinsen. Die Zinsrate ist konstant $r > 0$. Damit wird vor dem ersten Schaden der Überschussprozess

$$C_t^r = u\mathrm{e}^{rt} + c\frac{\mathrm{e}^{rt} - 1}{r}\;; \qquad 0 \le t < T_1\;.$$

Wir verwenden die Notation aus dem Cramér–Lundberg Modell.

a) Zeigen Sie, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit $\delta(u) = \mathbb{P}[\sup C_t \ge 0]$ die Gleichung

$$(c + ru)\delta'(u) + \lambda\Bigl[\int_0^u \delta(u - y)\,\mathrm{d}G(y) - \delta(u)\Bigr] = 0$$

erfüllt. Es genügt hier, wenn Sie die Differenzierbarkeit von rechts zeigen.

Der Einfachheit halber sei im Folgenden $c = 0$. Das heisst, das Portfolio wird ausschliesslich durch die Zinsen finanziert. Oder Ruin tritt erst ein, wenn die Prämien nicht mehr ausreichen, um die Zinsen zu zahlen.

b) Sei $\hat{\delta}(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-su}\delta(u)\,\mathrm{d}u$ die Laplace-Transformierte von $\delta(u)$. Finden Sie eine Differentialgleichung für $\hat{\delta}(s)$.
Hinweis: Hat $f(x)$ die Laplace-Transformierte $\hat{f}(s)$, dann gilt

$$\int_0^\infty x f(x) \mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\hat{f}(s)\,.$$

c) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $\hat{\delta}(s)$.