Lösung der Klausur

1. Wir haben $u_i'(z) = 1/(c_i + z)$. Somit muss es Konstanten θ_i geben, so dass

$$\frac{1}{c_i + w_i - f_i(\boldsymbol{X})} = \frac{\theta_i}{c_1 + w_1 - f_1(\boldsymbol{X})}\;.$$

Also haben wir

$$f_i(\boldsymbol{X}) = c_i + w_i + \frac{f_1(\boldsymbol{X}) - c_1 - w_1}{\theta_i}\;.$$

Dies ergibt für $\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{i=1}^n f_i(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n (c_i + w_i) + (f_1(\boldsymbol{X}) - c_1 - w_1)\sum_{i=1}^n \theta_i^{-1}\;.$$

Wir erhalten

$$f_1(\boldsymbol{X}) = c_1 + w_1 + \frac{\boldsymbol{\Sigma} - \sum_{i=1}^n (c_i + w_i)}{\sum_{i=1}^n \theta_i^{-1}}\;.$$

Damit ist

$$f_j(\boldsymbol{X}) = c_j + w_j + \frac{\boldsymbol{\Sigma} - \sum_{i=1}^n (c_i + w_i)}{\theta_j \sum_{i=1}^n \theta_i^{-1}}\;.$$

Damit wird das Gesamtrisiko proportional gegen eine Prämie verteilt.

2. **a)** Wir haben

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y_{ij} > x] &= \mathbb{E}[\mathbb{P}[Y_{ij} > x \mid \Theta_i]] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\Theta_i x}] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\vartheta x}\frac{\alpha^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\vartheta^{\gamma-1}\mathrm{e}^{-\alpha\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= \frac{\alpha^\gamma \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma)(\alpha + x)^\gamma} = \Bigl(\frac{\alpha}{\alpha + x}\Bigr)^\gamma\;.\end{aligned}$$

Somit ist Y_{ij} Pareto(γ, α) verteilt. Der Erwartungswert existiert falls $\gamma > 1$ und ist $\frac{\alpha}{\gamma-1}$.

b) Die gemeinsame Dichte ist

$$\frac{\alpha^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\vartheta^{\gamma-1}\mathrm{e}^{-\alpha\vartheta}\prod_{j=1}^m \vartheta\mathrm{e}^{-\vartheta y_j} = \frac{\alpha^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\vartheta^{\gamma+m-1}\exp\Bigl\{-\Bigl(\alpha + \sum_{j=1}^m y_j\Bigr)\vartheta\Bigr\}\;.$$

Somit ist die bedingte Verteilung von Θ_i bedingt auf $Y_{i1}, \ldots, Y_{im}$ eine $\Gamma(\gamma + m, \alpha + m\bar{Y}_i)$-Verteilung.

c) Unter Verwendung von a) und b), erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[m(\Theta_i) \mid Y_{i1},\dots,Y_{im}] &= \mathbb{E}[Y_{i(m+1)} \mid Y_{i1},\dots,Y_{im}] \\ &= \frac{\alpha + m\bar{Y}_i}{\gamma + m - 1} = Z\bar{Y}_i + (1-Z)\frac{\alpha}{\gamma - 1}\end{aligned}$$

mit den Kredibilitätsfaktor

$$Z = \frac{m}{\gamma + m - 1} = \frac{1}{1 + (\gamma - 1)/m}\,.$$

Letzterer Ausdruck macht natürlich nur Sinn, falls $\gamma > 1$.

d) Der Erwartungswert $\mathbb{E}[Y_1] = \infty$ existiert nicht, aber nach nur einer Beobachtung existiert der bedingte Erwartungswert $\mathbb{E}[Y_{i(m+1)} \mid Y_{i1},\dots,Y_{im}] < \infty$.

3. a) Betrachten wir den Prozess im Zeitpunkt $T_1 \wedge h$, so erhalten wir für $f(t) = u\mathrm{e}^{rt} + c\frac{\mathrm{e}^{rt}-1}{r}$

$$\delta(u) = \mathrm{e}^{-\lambda h}\delta(f(h)) + \int_0^h \int_0^{f(t)} \delta(f(t) - y)\,\mathrm{d}G(y)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Da $f(t)$ für $t \downarrow 0$ nach u konvergiert, ist $\delta(u)$ rechtsstetig. Umgruppierung und Division durch h gibt

$$\begin{aligned}0 = \frac{f(h) - u}{h} \cdot \frac{\delta(f(h)) - \delta(u)}{f(h) - u} &- \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda h}}{h}\delta(f(h)) \\ &+ \frac{1}{h}\int_0^h \int_0^{f(t)} \delta(f(t) - y)\,\mathrm{d}G(y)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Lassen wir $h \downarrow 0$, folgt dass $\delta(u)$ von rechts differenzierbar ist, und dass

$$(c + ru)\delta'(u) + \lambda\Big[\int_0^u \delta(u - y)\,\mathrm{d}G(y) - \delta(u)\Big] = 0\,.$$

Ein ähnliches Argument zeigt Differenzierbarkeit von links.

b) Anfangskapital 0 erzeugt keine Einnahmen. Daher ist $\delta(0) = 0$. Wir wissen aus der Vorlesung

$$\int_0^\infty \delta'(u)\mathrm{e}^{-su}\,\mathrm{d}u = s\hat{\delta}(s) - \delta(0) = s\hat{\delta}(s)$$

und

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-su}\int_0^u \delta(u - y)\,\mathrm{d}G(y)\,\mathrm{d}u = \hat{\delta}(s)M_Y(-s)\,.$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit e^{-su} und integrieren über $(0,\infty)$, so erhalten wir mit dem Hinweis

$$-r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s\hat{\delta}(s)) - \lambda\hat{\delta}(s)(1 - M_Y(-s)) = -rs\hat{\delta}'(s) - (r + \lambda(1 - M_Y(-s)))\hat{\delta}(s) = 0\,.$$

c) Dies ist eine lineare Differentialgleichung mit der allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned}\hat\delta(s) &= C\exp\Bigl\{-\int_1^s \frac{r+\lambda(1-M_Y(-v))}{rv}\,\mathrm{d}v\Bigr\}\\ &= \frac{C}{s}\exp\Bigl\{-\int_1^s \frac{\lambda(1-M_Y(-v))}{rv}\,\mathrm{d}v\Bigr\}\;.\end{aligned}$$

Als Randbedingung erhalten wir $1 = \delta(\infty) = \lim_{s\downarrow 0} s\hat\delta(s)$. Somit ist $C = \exp\{-\int_0^1 \frac{\lambda(1-M_Y(-v))}{rv}\,\mathrm{d}v\}$, und wir erhalten die Lösung

$$\hat\delta(s) = \frac{1}{s}\exp\Bigl\{-\int_0^s \frac{\lambda(1-M_Y(-v))}{rv}\,\mathrm{d}v\Bigr\}\;.$$