Lösung der Nachklausur

1. Wir haben $u_i'(z) = 1 - z/c_i$. Somit muss gelten

$$1 - \frac{w_i - f_i(\boldsymbol{X})}{c_i} = \theta_i\Bigl(1 - \frac{w_1 - f_1(\boldsymbol{X})}{c_1}\Bigr)\;,$$

oder äquivalent

$$f_i(\boldsymbol{X}) + (c_i - w_i) = \theta_i c_i\Bigl(1 - \frac{w_1 - f_1(\boldsymbol{X})}{c_1}\Bigr)\;.$$

Summieren über i gibt mit $\boldsymbol{\Sigma} = \sum_i X_i = \sum_i f_i(\boldsymbol{X})$

$$\boldsymbol{\Sigma} + \sum_i (c_i - w_i) = \Bigl(1 - \frac{w_1 - f_1(\boldsymbol{X})}{c_1}\Bigr)\sum_i \theta_i c_i\;.$$

Durch Auflösen nach $f_1(\boldsymbol{X})$ erhält man

$$f_1(\boldsymbol{X}) = \frac{c_1}{\sum_i \theta_i c_i}\Bigl(\boldsymbol{\Sigma} + \sum_i (c_i - w_i)\Bigr) - (c_1 - w_1)\;.$$

Setzen wir dies ein, ergibt sich

$$f_i(\boldsymbol{X}) = \frac{c_i\theta_i}{\sum_j \theta_j c_j}\Bigl(\boldsymbol{\Sigma} + \sum_j (c_j - w_j)\Bigr) - (c_i - w_i)\;.$$

Dies ist eine proportionale Aufteilung des Gesamtschadens $\boldsymbol{\Sigma}$ gegen eine Prämie.

2. Ein Bühlmann–Straub Modell ist für die geschilderte Situation angebracht. Wir müssen die Parameter zuerst bestimmen. Wir haben für $X_j = Y_j/P_j$ $P_j = \mathbb{E}[Y_j] = \mathbb{E}[X_j]P_j$, also $\mu = \mathbb{E}[X_j] = 1$. Aus

$$P_j^2 = \operatorname{Var}[\mathbb{E}[Y_j \mid \Theta]] = \operatorname{Var}[P_j m(\Theta)] = P_j^2 v^2$$

folgt $v^2 = 1$. Weiter ist

$$\operatorname{Var}[Y_j] = \mathbb{E}[(X_j P_j)^2] - \mu^2 P_j^2 = P_j^2 \mathbb{E}[s^2(\Theta)/P_j + m^2(\Theta)] - \mu^2 P_j^2 = P_j\sigma^2 + v^2 P_j^2\;.$$

Daraus schliessen wir $\sigma^2 = 5$.

Die Summe der Risikovolumen ist $P. = 45$, die Summe der Schadenzahlungen 54. Damit der Schaden pro Volumen $\bar{X} = 54/45 = 1.2$. Der Kredibilitätsfaktor wird

$$Z_{2016} = \frac{1}{1 + \dfrac{\sigma^2}{P.v^2}} = \frac{1}{1 + \dfrac{5}{45}} = \frac{9}{10} = 0.9\,.$$

Somit erhalten wir für 2016 die Nettoprämie

$$\pi_{2016} = P_{2016}(0.9 \cdot 1.2 + 0.1 \cdot 1) = 13 \cdot 1.18 = 15.34\ .$$

3. Die Momente der Loggamma Verteilung sind

$$\mu_n = \mathbb{E}[Y_i^n] = \mathbb{E}[\exp\{n \log Y_i\}] = \Bigl(\frac{4}{4-n}\Bigr)^2\ .$$

Also ist $\mu = 16/9$, $\mu_2 = 4$, $\mu_3 = 16$.

a) Die Flanke der Loggamma-Verteilung ist

$$\mathbb{P}[Y_i > y] = \mathbb{P}[\log Y_i > \log y] = (1 + 4\log y)\mathrm{e}^{-4\log y} = (1 + 4\log y)y^{-4}\ .$$

b) Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1 + 4\log(zx))(xz)^{-4}}{(1 + 4\log x)x^{-4}} = z^{-4} \lim_{x\to\infty} \frac{1 + 4\log z + 4\log x}{1 + 4\log x} = z^{-4}\ .$$

Somit ist nach Lemma F.4 im Skirpt die Verteilung subexponentiell. Wir haben dann also

$$\begin{aligned}\psi(u) &\sim \frac{1}{1/3}\int_u^\infty (1 + 4\log x)x^{-4}\,\mathrm{d}x = 3\int_{\log u}^\infty (1 + 4y)\mathrm{e}^{-4y}\mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y \\ &= \Bigl(\frac{7}{3} + 4\log u\Bigr)\mathrm{e}^{-3\log u} = \Bigl(\frac{7}{3} + 4\log u\Bigr)u^{-3}\ .\end{aligned}$$

c) Die Parameter für die deVylder-Approximation werden

$$\tilde{\alpha} = \frac{3 \cdot 4}{16} = \frac{3}{4}\,, \quad \tilde{\lambda} = \frac{9 \cdot 4^3}{2 \cdot 16^2} = \frac{9}{8}\,, \qquad \tilde{c} = \frac{19}{9} - \frac{16}{9} + \frac{9/8}{3/4} = \frac{11}{6}\ .$$

Die Ruinwahrscheinlichkeit wird also approximiert durch

$$\psi(u) \approx \frac{9/8}{3/4 \cdot 11/6}\exp\Bigl\{-\Bigl(3/4 - \frac{9/8}{11/6}\Bigr)u\Bigr\} = \frac{9}{11}\exp\{-3u/22\}\ .$$

Das gesuchte Kapital wird $u = \frac{22}{3}\log(900/11) \approx 32.2997$.