# Klausur 7.2.2019

**1.** In einem Markt gibt es $n$ Agenten mit Anfangskapital $w_i > 1$, Risiken $X_i$ und HARA Nutzenfunktionen $u_i(z) = \alpha^{-1}(c_i + z)^\alpha$ für ein $c_i > 0$ und $0 < \alpha < 1$. Die Risiken seien durch $0 \le X_i \le 1$ beschränkt. Bestimmen Sie alle Pareto-optimalen Risikoteilungen.

**2.** Sei $\Theta$ Beta $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ verteilt, also mit Dichte

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\vartheta^{\alpha-1}(1-\vartheta)^{\beta-1}\mathbb{I}_{\vartheta\in(0,1)}\;, \qquad \alpha, \beta > 0\;.$$

Gegeben $\Theta$, seien die Anzahl Schäden $N_j$ im Jahr $j$ bedingt unabhängig und geometrisch verteilt mit Parameter $\Theta$, also

$$\mathbb{P}[N_j = n \mid \Theta] = (1-\Theta)\Theta^n\;, \qquad n = 0, 1, 2, \dots\;.$$

**a)** (8 Punkte) Finden Sie die unbedingte Verteilung von $N_j$ und berechnen Sie den unbedingten Erwartungswert.
**Hinweis:** Berechnen Sie den Erwartungswert ohne Hilfe der unbedingten Verteilung.

**b)** (4 Punkte) Wir beobachten nun $(N_1, N_2, \dots, N_m)$. Bestimmen Sie die Verteilung von $\Theta$ bedingt auf $(N_1, N_2, \dots, N_m)$ und bestimmen Sie den Bayes'schen Schätzer für den Erwartungswert $\mathbb{E}[N_{m+1} \mid N_1, N_2, \dots, N_m]$.

**3.** Betrachten wir ein Cramér–Lundberg Modell, in dem Kapital über einer Schranke $b > 0$ sofort als Dividende ausbezahlt wird. Die Auszahlung stoppt, sobald Ruin eintritt. Somit wird der Überschussprozess

$$C_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Y_k - D_t\;,$$

wobei $D_t = \sup_{0\le s\le t}(u + cs - \sum_{k=1}^{N_s} Y_k - b)^+$ die Summe aller Dividendenzahlungen bezeichnet. Wir interessieren uns für den diskontierten Wert der Dividenden

$$\phi(u) = \mathbb{E}\Big[\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\delta t}\,\mathrm{d}D_t \;\Big|\; C_0 = u\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\delta t} c\mathbb{I}_{C_t = b}\,\mathrm{d}t \;\Big|\; C_0 = u\Big]\;,$$

wobei $\delta > 0$ und $\tau = \inf\{t : C_t < 0\}$ den Ruinzeitpunkt bezeichnet. Wir nehmen $0 \le u \le b$ an.

**a)** (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $D_t \le ct$ und daher $\phi(u) \le c/\delta$.

**b)** (5 Punkte) Die Funktion $\phi$ erfüllt die Gleichung (am Rand nur von einer Seite)

$$c\phi'(u) + \lambda\Big[\int_0^u \phi(u-y)\,\mathrm{d}G(y) - \phi(u)\Big] - \delta\phi(u) = 0\ .$$

Zeigen Sie die Differenzierbarkeit von rechts, Rechtsstetigkeit und die Gleichung für $0 \le u < b$.

**c)** (4 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\phi(b) = \frac{c}{\lambda+\delta} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\int_0^b \phi(b-y)\,\mathrm{d}G(y)\ .$$

**d)** (2 Punkte) Schliessen Sie, dass $\phi'(b) = 1$.