Lösung der Klausur

1. Wir haben $u_i'(z) = (c_i + z)^{\alpha-1}$. Somit muss es Konstanten $\theta_i > 0$ geben, so dass

$$(c_i + w_i - f_i(\boldsymbol{X}))^{\alpha-1} = \theta_i^{\alpha-1}(c_1 + w_1 - f_1(\boldsymbol{X}))^{\alpha-1}\;.$$

Also haben wir

$$f_i(\boldsymbol{X}) = c_i + w_i + \theta_i(f_1(\boldsymbol{X}) - c_1 - w_1)\;.$$

Dies ergibt

$$\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n f_i(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n (c_i + w_i) + \Bigl(\sum_{i=1}^n \theta_i\Bigr)(f_1(\boldsymbol{X}) - c_1 - w_1)\;.$$

Wir erhalten

$$f_1(\boldsymbol{X}) = c_1 + w_1 + \frac{1}{\sum_{j=1}^n \theta_j}\sum_{j=1}^n (X_j - c_j - w_j)\;.$$

Damit ist

$$f_i(\boldsymbol{X}) = c_i + w_i + \frac{\theta_i}{\sum_{j=1}^n \theta_j}\sum_{j=1}^n (X_j - c_j - w_j)\;.$$

Damit wird das Gesamtrisiko proportional gegen eine Prämie verteilt.

2. **a)** Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[N_j = n] &= \mathbb{E}[\mathbb{P}[N_j = n \mid \Theta]] = \mathbb{E}[(1-\Theta)\Theta^n] \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 \vartheta^{n+\alpha-1}(1-\vartheta)^{\beta}\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \\
&= \frac{\beta\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\cdots(\alpha+\beta+n)}\;.
\end{aligned}$$

Für $\beta > 1$ erhalten wir für den Erwartungswert

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_j] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_j \mid \Theta]] = \mathbb{E}\Big[\frac{\Theta}{1-\Theta}\Big] \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \vartheta^\alpha (1-\vartheta)^{\beta-2} \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\alpha}{\beta-1} \;.
\end{aligned}$$

Für $0 < \beta \le 1$ zeigt die obige Rechnung, dass der Erwartungswert unendlich ist.

b) Sei $n = n_1+n_2+\cdots+n_m$. Die gemeiname Verteilung von Θ und $(N_1, \dots, N_m)$ ist

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \vartheta^{\alpha-1}(1-\vartheta)^{\beta-1} \prod_{j=1}^m (1-\vartheta)\vartheta^{n_j} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \vartheta^{\alpha+n-1}(1-\vartheta)^{\beta+m-1} \;.$$

Bis auf die Konstanten ist dies (für Θ) die Dichte der $\mathrm{B}(\alpha+n, \beta+m)$ Verteilung. Somit ist Θ bedingt auf $(N_1, \dots, N_m)$ $\mathrm{B}(\alpha+n, \beta+m)$ verteilt. Aus dem ersten Teil der Aufgabe erhalten wir somit den Bayes Schätzer

$$\mathbb{E}[N_{m+1} \mid N_1, N_2, \dots, N_m] = \frac{\alpha + \sum_{j=1}^m N_j}{\beta+m-1} \;,$$

da $\beta + m > 1$.

3. **a)** Aus

$$\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\delta t} c \mathbb{1}_{C_t = b} \,\mathrm{d}t \le \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\delta t} c \,\mathrm{d}t \le \frac{c}{\delta}$$

folgt die Behauptung.

b) Betrachten wir den Zeitpunkt $T_1 \wedge h$ für $0 < h \le (b-u)/c$. Wir erhalten

$$\phi(u) = \mathrm{e}^{-\lambda h}\mathrm{e}^{-\delta h}\phi(u+ch) + \int_0^h \mathrm{e}^{-\delta t} \int_0^{u+ct} \phi(u+ct-y) \,\mathrm{d}G(y) \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \,\mathrm{d}t \;.$$

Lassen wir $h \downarrow 0$, so sehen wir, dass $\phi(u)$ rechtsstetig ist. Umordnen ergibt

$$\begin{aligned}
0 = c\frac{\phi(u+ch)-\phi(u)}{ch} &- \frac{1-\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)h}}{h}\phi(u+ct) \\
&+ \frac{1}{h}\int_0^h \mathrm{e}^{-\delta t} \int_0^{u+ct} \phi(u+ct-y) \,\mathrm{d}G(y) \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \,\mathrm{d}t \;.
\end{aligned}$$

Der Integrand konvergiert für $t \downarrow 0$. Damit konvergieren alle Terme nach dem ersten Term. Das bedeutet, dass auch der erste Term konvergieren muss und die Ableitung von rechts existiert. Lassen wir $h \downarrow 0$, so folgt

$$0 = c\phi'(u) - (\lambda+\delta)\phi(u) + \lambda \int_0^u \phi(u-y) \,\mathrm{d}G(y) \;,$$

was die Aussage beweist.

c) Sei $u = b$ und betrachten wir den Prozess bis zum Zeitpunkt T_1. Dann erhalten wir

$$\phi(b) = \int_0^\infty \Big[\int_0^t \mathrm{e}^{-\delta s} c \, \mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-\delta t} \int_0^u \phi(b-y) \, \mathrm{d}G(y) \Big] \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t \; .$$

Es gilt

$$\begin{aligned} c \int_0^\infty \int_0^t \mathrm{e}^{-\delta s} \, \mathrm{d}s \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t &= c \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\delta s} \int_s^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s \\ &= c \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\delta s} \mathrm{e}^{-\lambda s} \, \mathrm{d}s = \frac{c}{\lambda + \delta} \; . \end{aligned}$$

Somit erhalten wir durch Ausrechnen des anderen Integrals

$$\phi(b) = \frac{c}{\lambda + \delta} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \int_0^b \phi(b-y) \, \mathrm{d}G(y) \; .$$

d) Die Gleichung aus c) kann geschrieben werden als

$$c + \lambda \Big[\int_0^b \phi(b-y) \, \mathrm{d}G(y) - \phi(b) \Big] - \delta \phi(b) = 0 \; .$$

Vergleichen mit der Gleichung aus b) für $b = u$ ergibt $\phi'(b) = 1$.