Nachklausur 13.3.2019

1. Seien in einem Markt n Agenten mit Anfangskapital w_i und Risiken X_i. Die Agenten haben exponentielle Nutzenfunktionen $u_i(z) = -\beta_i^{-1} \exp\{-\beta_i z\}$ für ein $\beta_i > 0$. Bestimmen Sie alle Pareto-optimalen Risikoteilungen.

2. Seien die jährlichen Verluste $X_1, X_2, \ldots, X_m$ eines Portfolios bedingt iid und normalverteilt $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei μ bekannt ist. Der Parameter $\tau = 1/(2\sigma^2)$ sei $\Gamma(\gamma, \alpha)$ verteilt, also mit Dichte

$$f_\tau(t) = \frac{\alpha^\gamma}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1} \mathrm{e}^{-\alpha t} \mathbb{I}_{t>0} \ .$$

Für die weitere Betrachtung nehmen wir $\mu = 0$ an, was den Daten $X_1 - \mu, X_2 - \mu, \ldots, X_m - \mu$ entspricht.

a) (3 Punkte) Berechnen Sie $\mathbb{E}[\sigma^2]$ und $\mathbb{E}[\sigma^4]$. Welche Bedingungen müssen für γ, α gelten, damit die Erwartungswerte endlich sind?

b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die a posteriori Verteilung von τ, d.h., die bedingte Verteilung von τ gegeben die Beobachtungen $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$, eine Gamma $\Gamma(\gamma + m/2, \alpha + \sum_{i=1}^m x_i^2)$ Verteilung ist.

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie den Bayes-Schätzer von σ^2, d.h., den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[\sigma^2 \mid X_1, X_2, \ldots, X_m]$.

d) (5 Punkte) Bestimmen Sie den linearen Bayes-Schätzer von σ^2, d.h. finden Sie Zahlen $g_0, g_1, \ldots, g_m$, so dass $\mathbb{E}[(g_0 + \sum_{j=1}^m g_j X_j - \sigma^2)^2]$ minimal wird. Haben Sie eine Erklärung für dieses Resultat?

3. Sei $\{C_t\}$ ein Cramér–Lundberg Modell. Wir bezeichnen die Schadenzeitpunkte mit $\{T_n\}$ und die Ruinzeit mit τ. Wir nehmen an, dass der Anpassungskoeffizient R existiert. Sei $\psi_n(u) = \mathbb{P}[\tau \le T_n \mid C_0 = u]$. Zeigen Sie (z.B. mit vollständiger Induktion), dass $\psi_n(u) < \mathrm{e}^{-Ru}$ und schliessen Sie, dass die Lundberg-Ungleichung $\psi(u) \le \mathrm{e}^{-Ru}$ für $u \ge 0$ erfüllt ist.