Lösung der Nachklausur

1. Wir haben $u_i'(z) = \mathrm{e}^{-\beta_i z}$. Somit muss es Konstanten $\theta_i \in \mathbb{R}$ geben, so dass

$$\mathrm{e}^{-\beta_i(w_i - f_i(\boldsymbol{X}))} = \mathrm{e}^{\theta_i}\mathrm{e}^{-\beta_1(w_1 - f_1(\boldsymbol{X}))} \ .$$

Also haben wir

$$f_i(\boldsymbol{X}) = w_i + \frac{\theta_i}{\beta_i} + \frac{\beta_1}{\beta_i}(f_1(\boldsymbol{X}) - w_1) \ .$$

Dies ergibt

$$\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n f_i(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n \Bigl(w_i + \frac{\theta_i}{\beta_i}\Bigr) + \Bigl(\sum_{i=1}^n \frac{\beta_1}{\beta_i}\Bigr)(f_1(\boldsymbol{X}) - w_1) \ .$$

Wir erhalten mit $\theta_1 = 0$,

$$f_1(\boldsymbol{X}) = w_1 + \frac{\sum_{j=1}^n X_j - w_j - \frac{\theta_j}{\beta_j}}{\beta_1 \sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta_j}} \ .$$

Damit ist

$$f_i(\boldsymbol{X}) = w_i + \frac{\theta_i}{\beta_i} + \frac{\sum_{j=1}^n X_j - w_j - \frac{\theta_j}{\beta_j}}{\beta_i \sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta_j}} \ .$$

Damit wird das Gesamtrisiko proportional gegen eine Prämie verteilt.

2. **a)** Wir haben

$$\mathbb{E}[\sigma^2] = \frac{\alpha^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \frac{1}{2t} t^{\gamma-1}\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\,\frac{\Gamma(\gamma-1)}{2\alpha^{\gamma-1}} = \frac{\alpha}{2\gamma-2}$$

unter der Bedingung, dass $\gamma > 1$. Analog

$$\mathbb{E}[\sigma^4] = \frac{\alpha^2}{4(\gamma-1)(\gamma-2)} \ ,$$

vorausgesetzt dass $\gamma > 2$. Die Bedingung $\gamma > 2$ muss also erfüllt sein.

b) Die gemeinsame Dichte von τ und $X_1, \ldots, X_m$ ist für $t > 0$,

$$\Big(\frac{t}{\pi}\Big)^{m/2} \exp\Big\{-t\sum_{i=1}^m x_i^2\Big\}\frac{\alpha^\gamma}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}\mathrm{e}^{-\alpha t} = Ct^{\gamma+m/2-1}\exp\Big\{-\Big(\alpha+\sum_{i=1}^m x_i^2\Big)t\Big\} .$$

Dies ist die Dichte einer Gamma Verteilung. Somit ist die a posteriori Verteilung von τ $\Gamma(\gamma + m/2, \alpha + \sum_{i=1}^m x_i^2)$.

c) Aus a) und b) erhalten wir

$$\mathbb{E}[\sigma^2 \mid X_1, \ldots, X_m] = \frac{\alpha + \sum_{i=1}^m X_i^2}{2\gamma + m - 2} .$$

d) Leiten wir nach g_0 ab, erhalten wir die Bedingung erster Ordnung

$$0 = \mathbb{E}\Big[g_0 + \sum_{j=1}^m g_j X_j - \sigma^2\Big] = g_0 + 0 - \mathbb{E}[\sigma^2] = g_0 - \frac{\alpha}{2\gamma-2} .$$

Somit gilt $g_0 = \frac{\alpha}{2\gamma-2}$. Leiten wir nach g_k für $k \geq 1$ ab, so erhalten wir die Bedingung

$$0 = \mathbb{E}\Big[\Big(g_0 + \sum_{j=1}^m g_j X_j - \sigma^2\Big)X_k\Big] = \sum_{j=1}^m \mathbb{E}[g_j X_j X_k] - \mathbb{E}[\sigma^2 X_k] .$$

Sei $j \neq k$. Dann erhalten wir

$$\mathbb{E}[X_j X_k] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_j X_k \mid \sigma^2]] = \mathbb{E}[0] = 0 .$$

Für $j = k$, ist

$$\mathbb{E}[X_k^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_k^2 \mid \sigma^2]] = \mathbb{E}[\sigma^2] .$$

Weiter ist

$$\mathbb{E}[\sigma^2 X_k] = \mathbb{E}[\sigma^2 \mathbb{E}[X_k \mid \sigma^2]] = \mathbb{E}[0] = 0 .$$

Also ist die Gleichung $g_k \mathbb{E}[\sigma^2] = 0$, also $g_k = 0$. Dies gibt den linearen Bayes-Schätzer $g_0 = \frac{\alpha}{2\gamma-2}$. Der Schätzer ist konstant. Der Parameter σ^2 misst den Abstand zu $\mu = 0$. Somit haben X_k und $-X_k$ das selbe Gewicht. Das heisst, der Schätzer $s_-^2 = g_0 - \sum_{j=1}^m g_j X_j$ ist genau so gut, wie der gesuchte Schätzer s_+^2. Damit ist auch $\frac{1}{2}(s_+^2 + s_-^2) = g_0$ genau so gut. Daher muss der Schätzer konstant sein. Insbesondere ist ein linearer Schätzer hier keine gute Wahl.

3. Sei zuerst $n = 0$. Wegen $T_0 = 0$ ist $\psi_0(u) = 0$ und die Behauptung ist trivial.

Sei nun $n \geq 1$ und nehmen wir $\psi_{n-1}(u) < \mathrm{e}^{-Ru}$ an. Tritt Ruin vor T_n auf, dann kann er beim ersten Schaden auftreten, oder bei einem der $n-1$ folgenden

Schäden. Bedingen auf C_{T_1} ergibt $\mathbb{P}[\tau \le T_n \mid C_{T_1}] = \psi_{n-1}(C_{T_1})$, wobei wir $\psi_{n-1}(x) = 1$ für $x < 0$ setzen. Somit

$$\begin{aligned}
\psi_n(u) &= \int_0^\infty \Big(\int_0^{u+ct} \psi_{n-1}(u + ct - y) \, \mathrm{d}G(y) + \int_{u+ct}^\infty 1 \, \mathrm{d}G(y) \Big) \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t \\
&< \int_0^\infty \Big(\int_0^{u+ct} \mathrm{e}^{-R(u+ct-y)} \, \mathrm{d}G(y) + \int_{u+ct}^\infty 1 \, \mathrm{d}G(y) \Big) \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t \\
&\le \int_0^\infty \Big(\int_0^{u+ct} \mathrm{e}^{-R(u+ct-y)} \, \mathrm{d}G(y) + \int_{u+ct}^\infty \mathrm{e}^{-R(u+ct-y)} \, \mathrm{d}G(y) \Big) \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-Ru} \int_0^\infty \mathrm{e}^{Ry} \, \mathrm{d}G(y) \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-(Rc+\lambda)t} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{\lambda M_Y(R)}{\lambda + cR} \mathrm{e}^{-Ru} = \mathrm{e}^{-Ru}
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus $\lambda(M_Y(R) - 1) - cR = 0$ folgt. Da $\psi(u) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(u)$ folgt die Lundberg-Ungleichung.