Lösung der Klausur

1. Die Momente der Lognormalverteilung sind $\mu_n = \exp\{nm + \frac{1}{2}n^2 s^2\}$. Daher sind die Momente der zusammengesetzten Poissonverteilung folgen aus der Momentenerzeugenden Funktion der Normalverteilung,

$$\mathbb{E}[S] = \lambda \exp\{m + \tfrac{1}{2}s^2\}\;, \qquad \mathrm{Var}[S] = \lambda \exp\{2m + 2s^2\}\;,$$
$$\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3] = \lambda \exp\{3m + \tfrac{9}{2}s^2\}\;.$$

Der Koeffizient der Schiefe wird $\beta = \lambda^{-\frac{1}{2}} \exp\{\frac{3}{2}s^2\} = 2$. Für die anderen Parameter erhalten wir $\mathbb{E}[S] = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{0.5}$ und $\mathrm{Var}[S] = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{0.8}$.

a) Für die Normalapproximation erhalten wir

$$\kappa = \mathbb{E}[S] + 2.58\sqrt{\mathrm{Var}[S]} = \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{0.5} + 1.29\mathrm{e}^{0.4} \approx 2.3366\;.$$

b) Für die Normal Power Approximation erhalten wir durch Auflösen nach k

$$\begin{aligned}\kappa &= \mathbb{E}[S] + \frac{\beta\sqrt{\mathrm{Var}[S]}}{6}\Bigl(\Bigl(2.58 + \frac{3}{\beta}\Bigr)^2 - 1 - \frac{9}{\beta^2}\Bigr)\\ &= \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{0.5} + \frac{\mathrm{e}^{0.4}}{6}(4.08^2 - 3.25) \approx 3,7430\;.\end{aligned}$$

c) Die Parameter der verschobenen Gamma Approximation werden

$$\gamma = 1\;, \qquad \alpha = 2\mathrm{e}^{-0.4}\;, \qquad k = \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{0.5} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{0.4}\;.$$

Somit ist die Gamma Verteilung eine Exponentialverteilung mit Parameter α. Wir müssen $\mathrm{e}^{-\alpha z} = 0.005$ lösen, also $z = \alpha^{-1}\log 200 \approx 3,9521$. Also erhalten wir $\kappa = k + \alpha^{-1}\log 200 \approx 3,6184$.

2. Das Kapital nach Rückversicherung wird $w + P - 1.1(1-\beta)\mu - \beta X$. Somit erhalten wir für den Nutzen

$$-\exp\{-1.2(w + P - 1.1(1-\beta)\mu)\}\Bigl(\frac{\alpha}{\alpha - 1.2\beta}\Bigr)^{\gamma}\;,$$

wobei $\mu = \gamma/\alpha = 4/3$. Wir müssen daher

$$1.2(w + P - 1.1(1-\beta)\mu) + \gamma \log(\alpha - 1.2\beta) - \gamma \log \alpha$$

maximieren. Die Bedingung lautet dann

$$1.2 \cdot 1.1\mu - \frac{\gamma 1.2}{\alpha - 1.2\beta} = 0 \; .$$

Da die linke Seite fallend ist, handelt es sich wirklich um ein Maximum. Wir erhalten

$$\beta = \frac{1}{1.2}\Bigl(\alpha - \frac{\gamma}{1.1\mu}\Bigr) = \frac{\alpha}{1.2}\Bigl(1 - \frac{1}{1.1}\Bigr) \approx 0.1136 \; .$$

Die Rückversicherungsprämie wird $1.1 \cdot 0,8864\mu = 0.9750\mu$, der mittlere Schaden 0.1136μ. Insgesamt sind die Kosten $1.0886\mu \approx 1.4514$. Die Prämie P muss also grösser als 1.4514 sein.

3. Betrachten wir den Prozess zur Zeit $T_1 \wedge h$. Mit Wahrscheinlichkeit $\mathrm{e}^{-\lambda h}$ gibt es keinen Schaden und das Kapital ist $u + ch$. Mit der Dichte $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ gibt es einen Schaden y zur Zeit t und das Kapital ist $u + ct - y$. Ist $y \le u + ct$, ist Ruin noch nicht eingetreten, ansonsten ist die gesuchte Funktion $\exp\{\rho(u + ct - y)\}$. Also, aufgrund der Markoveigenschaft,

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \mathrm{e}^{-\lambda h}\phi(u + ch) \\ &\quad + \int_0^h \Bigl(\int_0^{u+ct} \phi(u + ct - y)\,\mathrm{d}G(y) + \int_{u+ct}^\infty \mathrm{e}^{\rho(u+ct-y)}\,\mathrm{d}G(y)\Bigr)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \; .\end{aligned}$$

Lassen wir $h \downarrow 0$ erhalten wir, dass $\phi(u)$ rechtsstetig ist. Durch Umformung erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\phi(u + ch) - \phi(u)}{h} &= \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda h}}{h}\phi(u + ch) \\ &\quad - \frac{1}{h}\int_0^h \Bigl(\int_0^{u+ct} \phi(u + ct - y)\,\mathrm{d}G(y) + \int_{u+ct}^\infty \mathrm{e}^{\rho(u+ct-y)}\,\mathrm{d}G(y)\Bigr)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \; .\end{aligned}$$

Da die rechte Seite konvergiert, muss auch die linke konvergieren, und ϕ ist differenzierbar von rechts. Ersetzen wir u durch $u - ch$ (für $u > 0$), so ergibt sich

$$\begin{aligned}\phi(u - ch) = \mathrm{e}^{-\lambda h}\phi(u) + \int_0^h \Bigl(&\int_0^{u-c(h-t)} \phi(u - c(h-t) - y)\,\mathrm{d}G(y) \\ &+ \int_{u-c(h-t)}^\infty \mathrm{e}^{\rho(u-c(h-t)-y)}\,\mathrm{d}G(y)\Bigr)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \; .\end{aligned}$$

Lassen wir $h \downarrow 0$ erhalten wir, dass $\phi(u)$ linksstetig ist. Durch Umformung erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\frac{\phi(u-ch)-\phi(u)}{-h} \\
&\qquad = \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda h}}{h}\phi(u) - \frac{1}{h}\int_0^h \Big(\int_0^{u-c(h-t)} \phi(u-c(h-t)-y)\,\mathrm{d}G(y) \\
&\qquad\qquad + \int_{u-c(h-t)}^{\infty} \mathrm{e}^{\rho(u-c(h-t)-y)}\,\mathrm{d}G(y)\Big)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\;.
\end{aligned}$$

Somit ist ϕ auch von links differenzierbar. Wir erhalten die gewünschte Gleichung (wegen der Stetigkeit von G)

$$c\phi'(u) = \lambda\phi(u) - \lambda\int_0^u \phi(u-y)\,\mathrm{d}G(y) - \lambda\int_u^\infty \mathrm{e}^{\rho(u-y)}\,\mathrm{d}G(y)\;.$$