# Lösung der Nachklausur

**1.** Es gilt $f_2(X) = X - f_1(X)$. Eine Pareto-optimal Risikoteilung muss daher die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{w_2 - X + f_1(X)}} = \theta \frac{1}{w_1 - f_1(X)}$$

erfüllen. Daher erhalten wir

$$f_1(X) = w_1 + \tfrac{1}{2}\theta(\theta \pm \sqrt{\theta^2 + 4(w_1 + w_2 - X)}) .$$

Die Risikoteilung muss wachsend in $X$ sein. Daher erhalten wir

$$f_1(X) = w_1 - \tfrac{1}{2}\theta(\sqrt{\theta^2 + 4(w_1 + w_2 - X)} - \theta) .$$

Die andere Lösung wäre auch nicht im Definitionsbereich von $u_1(w_1 - f_1(X))$.

**2.** **a)** Die Wahrscheinlichkeit für einen Schaden in 4 Jahren ist

$$0.5 \cdot 4 \cdot 0.2 \cdot 0.8^3 + 0.4 \cdot 4 \cdot 0.3 \cdot 0.7^3 + 0.1 \cdot 4 \cdot 0.5^4 = 0.3944 .$$

Der Kunde ist somit mit Wahrscheinlichkeit

$$\frac{0.5 \cdot 4 \cdot 0.2 \cdot 0.8^3}{0.39444} \approx 0.5192 , \qquad \frac{0.3 \cdot 4 \cdot 0.3 \cdot 0.7^3}{0.39444} \approx 0.4174$$

vom Typ A bzw. B, und damit mit Wahrscheinlichkeit 0.0634 vom Typ C. Der mittlere jährliche Schaden ist $p$. Somit ist die beste Schätzung für nächstes Jahr

$$\pi = 0.2 \cdot 0.5192 + 0.3 \cdot 0.4174 + 0.5 \cdot 0.0634 = 0.2608 .$$

**b)** Wir benötigen die Parameter des Bühlmann-Modells. Wir haben $\mu = 0.5 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.27$. Die bedingte Varianz ist jeweils $p(1-p)$ und damit

$$\sigma^2 = 0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.1890 .$$

Weiter ist

$$v^2 = 0.5 \cdot 0.2^2 + 0.4 \cdot 0.3^2 + 0.1 \cdot 0.5^2 - 0.27^2 = 0.0081 .$$

Mit dem Schätzer $\bar{X} = 0.25$ und $Z = 4v^2/(\sigma^2 + 4v^2) = 0.1463$ wird der Bühlmannschätzer

$$\pi_B = Z\bar{X} + (1 - Z)\mu = 0.1463 \cdot 0.25 + 0.8537 \cdot 0.27 = 0.2671 .$$

**3.** Die Dichte ist $y\mathrm{e}^{-y}$, der Mittelwert $\mu = 2$. Die Überlebenswahrscheinlichkeit erfüllt die Gleichung

$$3\delta'(u) = \delta(u) - \int_0^u \delta(u-y)y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \delta(u) - \int_0^u \delta(y)(u-y)\mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y\mathrm{e}^{-u}\;.$$

Ableiten ergibt

$$\begin{aligned}3\delta''(u) &= \delta'(u) - \int_0^u \delta(y)\mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y\mathrm{e}^{-u} + \int_0^u \delta(y)(u-y)\mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y\mathrm{e}^{-u} \\ &= \delta'(u) - \int_0^u \delta(y)\mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y\mathrm{e}^{-u} + (\delta(u) - 3\delta'(u)))\;.\end{aligned}$$

Noch einmal Ableiten

$$\begin{aligned}3\delta'''(u) &= \delta'(u) - 2\delta''(u) - \delta(u) + \int_0^u \delta(y)\mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y\mathrm{e}^{-u} \\ &= \delta'(u) - 2\delta''(u) + \delta'(u) - 3\delta'(u) - 3\delta''(u) \\ &= -5\delta''(u) - \delta'(u)\;.\end{aligned}$$

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind

$$r_0 = 0\;, \qquad -R = -\frac{5-\sqrt{13}}{6} = -0.2324\;, \qquad r_2 = -\frac{5+\sqrt{13}}{6} = -1.4343\;.$$

Somit ist $\delta(u) = A - B\mathrm{e}^{-Ru} + C\mathrm{e}^{r_2 u}$. Wir wissen, $A = 1$. Die Konstante $B$ erhalten wir aus der Cramér–Lundberg Approximation

$$B = \frac{3-2}{2/(1-R)^3 - 3} = \frac{(1-R)^3}{2 - 3(1-R)^3} \approx 0.7031\;.$$

Aus $\psi(0) = 1 \cdot 2/3$ erhalten wir $C = 0.0364$. Also ist $\psi(u) = 0.7032\mathrm{e}^{-Ru} - 0.0364\mathrm{e}^{r_2 u}$. Man könnte die beiden Konstanten auch durch Einsetzen in die Integro-Differentialgleichung erhalten.

Alternativ könnten man die Ruinwahrscheinlichkeit über die Laplace-Transformation erhalten

$$\hat{\psi}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{3s - 1 + (1+s)^{-2}} = \frac{2s+3}{3s^2+5s+1} = \frac{2s+3}{3(s+R)(s-r_2)}\;.$$

Partialbruchzerlegung ergibt

$$\hat{\psi}(s) = \frac{0.7031}{s+R} - \frac{0.0364}{s-r_2}\;.$$

Somit erhalten wir

$$\psi(u) = 0.7031\mathrm{e}^{-Ru} - 0.0364\mathrm{e}^{r_2 u}\;.$$