Klausur 6.2.2025

1. Sei N Poisson verteilt mit Parameter λ und $\mathbb{P}[Y_i = k] = f_k$, wobei $f_0+f_1+f_2 = 1$, $0 < f_2 < 1$ und die $\{Y_i\}$ iid sind. Wir setzen $g_r = \mathbb{P}[S = r]$ mit $S = \sum_{k=1}^N Y_k$. Sei $N_i = \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{Y_k=i}$.

a) (4 Punkte) Wie ist die gemeinsame Verteilung von N_1 und N_2?

b) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$g_r = \sum_{n=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} \frac{f_1^{r-2n} f_2^n \lambda^{r-n}}{n!(r-2n)!} \mathrm{e}^{-\lambda(1-f_0)} \;,$$

wobei $\lfloor z \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{N} : n \le z\}$ den Ganzzahlteil bezeichnet.

c) (2 Punkte) Begründen Sie, wieso die Formel aus b) der Panjer-Rekursion vorzuziehen ist.

2. In einem Markt gibt es zwei Agenten mit Anfangskapital w_k, Nutzenfunktion $u_k(x)$ und beschränktem Risiko X_k. Dabei ist

$$u_1(x) = 3x^{2/3} \;, \qquad u_2(x) = 3x^{1/3} \qquad x \ge 0 \;.$$

Bestimmen Sie alle Pareto-optimalen Risikoteilungen. Sie können annehmen, dass $X \le w_1 + w_2$.
Hinweis: Beachten Sie, dass nur eine der Lösungen möglich ist.

3. Sei $\{C_t\}$ ein Cramér–Lundberg Modell, $M_t = \sup\{C_s : 0 \le s \le t\}$ das laufende Maximum und $D_t = \max\{M_t, x\} - C_t$ der sogenannte Drawdown. Dann ist

$$D_t = x + \sum_{k=1}^{N_t} Y_k - c \int_0^t \mathbb{1}_{D_{s-} \ne 0} \,\mathrm{d}s \;.$$

Wir sind interessiert an $V(x) = \mathbb{E}[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rs} \mathbb{1}_{D_s > d} \,\mathrm{d}s]$ für $r > 0$ und $d > 0$. Wir betrachten nur stetige $G(y)$.

a) (7 Punkte) Zeigen Sie, dass $V(x)$ differenzierbar ist und die Gleichung

$$cV'(x) + (\lambda + r)V(x) - \lambda \int_0^\infty V(x+y)\,\mathrm{d}G(y) = \mathbb{1}_{x>d}$$

erfüllt. Es reicht die Aussage für die Ableitung von links zu zeigen.

b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$V(0) = \frac{\lambda}{\lambda + r} \int_0^\infty V(y)\,\mathrm{d}G(y);.$$

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie $V'(0)$ unter der Annahme, dass die Ableitung von rechts stetig in 0 ist.