Lösung der Klausur

1. **a)** Nach dem Buch sind N_1 und N_2 unabhängig Poisson verteilt mit Parametern λf_1 und λf_2, respektive.

b) Für $S = r$ und $N_2 = n$ muss $N_1 = r - 2n$ sein. N_2 kann dann höchstens $\lfloor r/2 \rfloor$ sein. Summieren ergibt

$$g_r = \sum_{n=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} \frac{(\lambda f_2)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda f_2} \frac{(\lambda f_1)^{r-2n}}{(r-2n)!} \mathrm{e}^{-\lambda f_1} = \sum_{n=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} \frac{f_1^{r-2n} f_2^n \lambda^{r-n}}{n!(r-2n)!} \mathrm{e}^{-\lambda(f_1+f_2)} \;.$$

Die gesuchte Formel folgt nun aus $f_1 + f_2 = 1 - f_0$.

c) In der Panjer-Rekursion wird die Summe bis r, hier nur bis $r/2$ verwendet, was weniger Summanden ausmacht.

2. Die Ableitungen der Nutzenfunktionen sind $u_1'(x) = 2x^{-1/3}$ und $u_2'(x) = x^{-2/3}$. Die zu lösende Gleichung ist

$$(w_2 - f_2(X))^{-2/3} = 2\tilde{\theta}(w_1 - f_1(X))^{-1/3} \;,$$

oder $w_2 - f_2(X) = \theta\sqrt{w_1 - f_1(X)}$ mit $\theta = (2\tilde{\theta})^{-3/2}$. Zählen wir $w_1 - f_1(X)$ dazu, erhalten wir

$$w - X = w_1 - f_1(X) + \theta\sqrt{w_1 - f_1(X)} \;,$$

mit $w = w_1 + w_2$ und $X = X_1 + X_2 = f_1(X) + f_2(X)$. Damit ist

$$\sqrt{w_1 - f_1(X)} = \tfrac{1}{2}\bigl(-\theta \pm \sqrt{\theta^2 + 4(w - X)}\bigr) \;.$$

$f_1(X)$ muss steigend in X sein, daher ist

$$f_1(X) = w_1 - \tfrac{1}{4}\bigl(\sqrt{\theta^2 + 4(w-X)} - \theta\bigr)^2 = X - w_2 + \tfrac{\theta}{2}\bigl(\sqrt{\theta^2 + 4(w-X)} - \theta\bigr) \;.$$

Dies gibt

$$f_2(X) = X - f_1(X) = w_2 - \tfrac{\theta}{2}\bigl(\sqrt{\theta^2 + 4(w-X)} - \theta\bigr) \;.$$

3. **a)** Für $0 < x \le d$ und $0 < h \le x/c$ haben wir, wenn wir auf $D_{T_1 \wedge h}$ bedingen,

$$V(x) = \mathrm{e}^{-rt} V(x - ch)\mathrm{e}^{-\lambda h} + \int_0^h \int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt} V(x - ct + y)\, \mathrm{d}G(y) \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t\ .$$

Lassen wir $h \downarrow 0$ so sehen wir, dass $V(x)$ linksstetig ist. Weiter ist

$$\begin{aligned}\frac{V(x) - V(x - ch)}{h} &= \frac{1}{h}\lambda \int_0^h \int_0^\infty V(x - ct + y)\, \mathrm{d}G(y)\mathrm{e}^{-(\lambda+r)t}\, \mathrm{d}t \\ &\qquad - \frac{1 - \mathrm{e}^{-(\lambda+r)h}}{h} V(x - ch)\ .\end{aligned}$$

Da die rechte Seite für $h \downarrow 0$ konvergiert, ist $V(x)$ differenzierbar und wir erhalten

$$cV'(x) = \lambda \int_0^\infty V(x + y)\, \mathrm{d}G(y) - (\lambda + r)V(x)\ .$$

Für $x > d$ und $0 < h \le (x - d)/c$ erhalten wir

$$\begin{aligned}V(x) &= \Bigl[\frac{1 - \mathrm{e}^{-rh}}{r} + \mathrm{e}^{-rh} V(x - ch)\Bigr]\mathrm{e}^{-\lambda h} \\ &\qquad + \int_0^h \Bigl[\frac{1 - \mathrm{e}^{-rt}}{r} + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt} V(x - ct + y)\, \mathrm{d}G(y)\Bigr]\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t\ .\end{aligned}$$

Lassen wir $h \downarrow 0$ erhalten wir die Linksstetigkeit. Umformen ergibt

$$\begin{aligned}\frac{V(x) - V(x - ch)}{h} &= \frac{\lambda}{h} \int_0^h \Bigl[\frac{1 - \mathrm{e}^{-rt}}{r} + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt} V(x - ct + y)\, \mathrm{d}G(y)\Bigr]\mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t \\ &\qquad + \frac{(1 - \mathrm{e}^{-rh})\mathrm{e}^{-\lambda h}}{rh} - \frac{1 - \mathrm{e}^{-(\lambda+r)h}}{h} V(x - ch)\ .\end{aligned}$$

Also ist V differenzierbar und

$$cV'(x) = \lambda \int_0^\infty V(x + y)\, \mathrm{d}G(y) - (\lambda + r)V(x) + 1\ .$$

b) Der Drawdownprozess bleibt in 0 bis zum nächsten Schaden. Also ist

$$\begin{aligned}V(0) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-rT_1} V(Y_1)] &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t \int_0^\infty V(y)\, \mathrm{d}G(y) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + r} \int_0^\infty V(y)\, \mathrm{d}G(y)\ .\end{aligned}$$

c) Setzen wir $V(0)$ aus b) in die Gleichung

$$-cV'(0) + (\lambda + r)V(0) - \lambda \int_0^\infty V(y)\, \mathrm{d}G(y)$$

ein, folgt $-cV'(0) = 0$.