Lösung der Nachklausur

1. a) Die Panjer Rekursion lautet

$$g_0 = \mathrm{e}^{-\lambda}\;, \qquad g_1 = \lambda f_1 g_0\;, \quad g_r = \frac{\lambda}{r}\bigl(f_1 g_{r-1} + 2 f_2 g_{r-2}\bigr)\;,\ (r \ge 2)\;.$$

b) Wir erhalten mit $g_{-1} = 0$

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^\infty r g_r x^{r-1} &= \lambda f_1 \sum_{r=1}^\infty g_{r-1} x^{r-1} + 2\lambda f_2 \sum_{r=1}^\infty g_{r-2} x^{r-1}\\ &= \lambda f_1 \sum_{n=0}^\infty g_n x^n + 2\lambda f_2 x \sum_{m=0}^\infty g_m x^m\;.\end{aligned}$$

Dies ist

$$\phi'(x) = \lambda f_1 \phi(x) + 2\lambda f_2 x \phi(x)\;.$$

c) Durch Separation der Variablen erhalten wir

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \lambda f_1 + 2\lambda f_2 x\;.$$

Also ist

$$\log\phi(x) = \lambda(f_1 x + f_2 x^2) + \log C$$

für eine Konstante C. Also $\phi(x) = C\exp\{\lambda(f_1 x + f_2 x^2\}$. Da $\phi(0) = g_0 = \mathrm{e}^{-\lambda}$ ist $C = \mathrm{e}^{-\lambda}$, was die behauptete Lösung ergibt.

d) Die Exponentialreihe wird

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k}{k!}(f_1 x + f_2 x^2 - 1)^k\;.$$

Um den Faktor von x^ℓ zu erhalten müssen wir für alle $k \ge \ell/2$ den Faktor von x^ℓ in $(f_1 x + f_2 x^2 - 1)^k$ berechnen und addieren, was nicht stabil möglich ist.

2. **a)** Wir haben $\bar{Y}_1 = 2$, $\bar{Y}_2 = 1$ und $\bar{Y}_3 = 3$. Der Durchschnitt ist $\hat{\mu} = 2$. Die Varianzschätzer sind $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{2}(1^2+0^2+(-1)^2) = 1$, $\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{2}((-1)^2+1^2+0^2) = 1$ und $\hat{\sigma}_3^2 = \frac{1}{2}(2(-1)^2 + 2^2) = 3$. Der Durchschnitt der Schätzer ist $\hat{\sigma}^2 = 5/3$. Für den letzten Schätzer erhalten wir $\hat{v}^2 = \frac{1}{2}(0^2 + (-1)^2 + (1)^2) - 5/9 = 4/9$.

b) Für den Kredibilitätsfaktor erhalten wir mit den Schätzern

$$Z = \frac{1}{1 + \frac{5/3}{3 \cdot 4/9}} = \frac{4}{9} \; .$$

Somit sind die Prämien für das vierte Jahr $\frac{4}{9}\bar{Y}_i + \frac{5}{9} \cdot 2$

Risiko

1	2	3
2	14/9	22/9

3. **a)** Der Erwartungswert der Schäden ist

$$\int_0^\infty (1 + \tfrac{1}{2}y)\mathrm{e}^{-y} \,\mathrm{d}y = 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} \; .$$

Also ist $2 > 1 \cdot \frac{3}{2}$.

b) Die Dichte der Verteilung ist $\frac{1}{2}(1+y)\mathrm{e}^{-y}$. Somit wird die momenterzeugende Funktion

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ry}(1 + y)\mathrm{e}^{-y} \,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-r} + \frac{1}{(1-r)^2}\Big) = \frac{2-r}{2(1-r)^2} \; .$$

Damit ist

$$1 - M_Y(-s) = \frac{2(1+s)^2 - (2+s)}{2(1+s)^2} = \frac{2s^2 + 3s}{2(1+s)^2} \; .$$

Somit erhalten wir

$$\hat{\delta}(s) = \frac{1/2}{2s - \frac{2s^2+3s}{2(1+s)^2}} = \frac{(1+s)^2}{4s(1+s)^2 - 2s^2 - 3s} = \frac{(1+s)^2}{(4s^2 + 6s + 1)s} \; .$$

c) Für die Transformierte der Ruinwahrscheinlichkeit ergibt sich

$$\hat{\psi}(s) = \frac{1}{s} - \frac{(1+s)^2}{(4s^2+6s+1)s} = \frac{3s^2 + 4s}{(4s^2 + 6s + 1)s} = \frac{3s+4}{4s^2+6s+1} \; .$$

d) Die Nullstellen des Nenners sind $\frac{1}{8}(-6 \pm \sqrt{36-16}) = \frac{1}{4}(-3 \pm \sqrt{5})$. Die Partialbruchzerlegung wird

$$\frac{A}{s+\frac{1}{4}(3-\sqrt{5})} + \frac{B}{s+\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})} = \frac{3s+4}{4s^2+6s+1}\ .$$

Dies ergibt

$$A = \frac{15+7\sqrt{5}}{40}\ , \qquad B = \frac{15-7\sqrt{5}}{40}\ .$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \frac{15+7\sqrt{5}}{40}\mathrm{e}^{-(3-\sqrt{5})u/4} + \frac{15-7\sqrt{5}}{40}\mathrm{e}^{-(3+\sqrt{5})u/4} \\ &= 0.766312\mathrm{e}^{-0.190983u} - 0.0163119\mathrm{e}^{-1.30902u}\ .\end{aligned}$$