

Klausur 7.8.2025

1. Bei Genversuchen an Pflanzen werden zwei Gene A und B eingesetzt. Bei einer Pflanze mit beiden Genen hat ein Nachkomme beide Gene mit einer Wahrscheinlichkeit von 70%, nur Gen A mit Wahrscheinlichkeit 20%, nur Gen B oder keines der Gene mehr mit Wahrscheinlichkeit von je 5%. Ist nur eines der Gene vorhanden, wird das Gen mit Wahrscheinlichkeit 60% vererbt, ansonsten verschwinden beide Gene. Eine Pflanze mit beiden Genen (1. Generation) wird weitervermehrt und eine Pflanze der dritten Generation (Enkelin) untersucht.
- a) (4 Punkte) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Gene bei der Enkelin verschwunden sind?
 - b) (4 Punkte) Wie gross sind die Wahrscheinlichkeiten, dass die Mutterpflanze der Enkelin (2. Generation) beide Gene, nur Gen A, bzw. nur Gen B hatte, wenn beide Gene bei der Enkelin verschwunden sind.
 - c) (4 Punkte) Begründen Sie, wieso bei einer Fortsetzung der Vermehrung die beiden Gene verschwinden werden.
2. Seien U_1 und U_2 unabhängige auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen.
- a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $X = -2 \log U_1$ exponential-verteilt mit Parameter $\alpha = \frac{1}{2}$ ist.
 - b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}xe^{-x/2} \leq 1$.
 - c) (3 Punkte) Berechnen Sie $\mathbb{P}[U_2 \leq \frac{1}{2}Xe^{-X/2}] = \mathbb{E}[\frac{1}{2}Xe^{-X/2}]$.
 - d) (3 Punkte) Berechnen Sie $\mathbb{P}[X \leq z, U_2 \leq \frac{1}{2}Xe^{-X/2}] = \mathbb{E}[\frac{1}{2}Xe^{-X/2}\mathbb{1}_{X \leq z}]$ für $z > 0$.
 - e) (2 Punkte) Berechnen Sie $\mathbb{P}[X \leq z \mid U_2 \leq \frac{1}{2}Xe^{-X/2}]$.

Sie müssen die Gleichheit in c) und d) nicht zeigen.

Hinweis: $\int_z^\infty xe^{-x} dx = (1+z)e^{-z}$.

- 3.** Gegeben ist die Verteilung der Zufallsvariable X_k mit $\mathbb{P}[X_k = 0] = 1 - \beta \frac{\pi^2}{6}$ und $\mathbb{P}[X_k = n] = \beta/n^2$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ mit dem Parameter $\beta \in (0, 6/\pi^2)$. Von N (unabhängigen) Beobachtungen ist N_m Mal der Wert m aufgetreten, $m \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- a)** (4 Punkte) Wieso kann die Momentenmethode (wie in der Vorlesung) nicht angewendet werden?
- b)** (8 Punkte) Schätzen Sie den Parameter β mit der Maximum-Likelihood Methode.