Lösung der Klausur

1. **a)** Bezeichnen wir mit X_k die vorhandenen Gene in der k-ten Generation. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_2 = AB, X_3 = 0] &= 0.7 \cdot 0.05 = 0.035 \;, \\
\mathbb{P}[X_2 = A, X_3 = 0] &= 0.2 \cdot 0.4 = 0.08 \;, \\
\mathbb{P}[X_2 = B, X_3 = 0] &= 0.05 \cdot 0.4 = 0.02 \;, \\
\mathbb{P}[X_2 = 0, X_3 = 0] &= 0.05 \cdot 1 = 0.05 \;, \\
\mathbb{P}[X_3 = 0] &= 0.035 + 0.08 + 0.02 + 0.05 = 0.185 \;.
\end{aligned}$$

b) Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_2 = AB \mid X_3 = 0] &= \frac{\mathbb{P}[X_2 = AB, X_3 = 0]}{\mathbb{P}[X_3 = 0]} = \frac{0.035}{0.185} = 0.1892 \;, \\
\mathbb{P}[X_2 = A \mid X_3 = 0] &= \frac{\mathbb{P}[X_2 = A, X_3 = 0]}{\mathbb{P}[X_3 = 0]} = \frac{0.08}{0.185} = 0.4324 \;, \\
\mathbb{P}[X_2 = B \mid X_3 = 0] &= \frac{\mathbb{P}[X_2 = B, X_3 = 0]}{\mathbb{P}[X_3 = 0]} = \frac{0.02}{0.185} = 0.1081 \;, \\
\mathbb{P}[X_2 = 0 \mid X_3 = 0] &= \frac{\mathbb{P}[X_2 = 0, X_3 = 0]}{\mathbb{P}[X_3 = 0]} = \frac{0.05}{0.185} = 0.2703 \;,
\end{aligned}$$

c) Für den Wechsel von AB zu einem der anderen Zustände können wir uns unabhängige $\{0, 1\}$ Experimente mit $p = 0.3$ vorstellen. Nach Borel–Cantelli treten hier unendlich viele 1'en auf, siehe auch Proposition 2.7. Somit findet ein Wechsel in endlicher Zeit statt. Ist der Wechsel nach 0, so ist nichts mehr zu tun. Ansonsten wiederholen wir das Argument mit $\tilde{p} = 0.4$, was zeigt, dass auch das verbliebene Gen in endlicher Zeit verschwindet.

2. **a)** Es gilt für $x > 0$

$$\mathbb{P}[-2 \log U_1 \le x] = \mathbb{P}[U_1 \ge \mathrm{e}^{-x/2}] = 1 - \mathrm{e}^{-x/2} \;,$$

was die Exponentialverteilung ist.

b) Wir müssen zeigen, dass $x\mathrm{e}^{-x/2} \leq 2$. Die Ableitung der linken Seite ist $(1 - \frac{1}{2}x)\mathrm{e}^{-x/2}$. Die Funktion ist wachsend für $x \leq 2$ und fallend für $x \geq 2$. Somit hat die linke Seite ein Maximum in $x = 2$ mit Wert $2\mathrm{e}^{-1} < 2$.

c) Die Dichte von X ist $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}$. Es gilt

$$\mathbb{E}[\tfrac{1}{2}X\mathrm{e}^{-X/2}] = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x/2}\ \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}\ \mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\ .$$

d) Wir erhalten

$$\mathbb{E}[\tfrac{1}{2}X\mathrm{e}^{-X/2}1\!\!1_{X\leq z}] = \tfrac{1}{2}\int_0^z x\mathrm{e}^{-x/2}\ \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}\ \mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}(1 - (1+z)\mathrm{e}^{-z})\ .$$

e) Die bedingte Wahrscheinlichkeit wird

$$\mathbb{P}[X \leq z \mid U_2 \leq \tfrac{1}{2}X\mathrm{e}^{-X/2}] = \frac{\mathbb{P}[X \leq z, U_2 \leq \frac{1}{2}X\mathrm{e}^{-X/2}]}{\mathbb{P}[U_2 \leq \frac{1}{2}X\mathrm{e}^{-X/2}]} = 1 - (1+z)\mathrm{e}^{-z}$$

für $z > 0$.

3. a) Der Erwartungswert der Verteilung wird

$$\mathbb{E}[X_k] = \sum_{n=1}^\infty n\frac{\beta}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\beta}{n} = \infty\ .$$

Daher kann die Momentenmethode (zumindest wie in der Vorlesung) nicht angewendet werden.

Bemerkung: Man könnte $\mathbb{E}[\sqrt{X_k}]$ statt dem ersten Moment schätzen.

b) Der Log-Likelihood wird

$$N_0\log(1 - \beta\tfrac{\pi^2}{6}) + \sum_{m=1}^\infty N_m(\log\beta - 2\log m)\ .$$

Die Ableitung nach β ist

$$-N_0\frac{\frac{\pi^2}{6}}{1-\beta\frac{\pi^2}{6}} + \sum_{m=1}^\infty N_m\frac{1}{\beta} = (N - N_0)\frac{1}{\beta} - N_0\frac{1}{\frac{6}{\pi^2} - \beta}\ .$$

Die Funktion ist fallend, also ist die Nullstelle ein Maximum. Wir erhalten also den Maximierer

$$\hat\beta = \tfrac{6}{\pi^2}\frac{N - N_0}{N}\ .$$