

## Nachklausur 23.9.2025

1. a) (9 Punkte) In einer Urne befinden sich  $K$  rote und  $N - K$  schwarze Kugeln. Es wird jeweils eine Kugel gezogen und zwei Kugeln der gezogenen Farbe zurückgelegt. Beim dritten Ziehen ( $N + 2$  Kugeln in der Urne) wird eine rote Kugel gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch die erste gezogene Kugel rot war? Kürzen Sie die Formeln soweit wie möglich.
- b) (3 Punkte) Seien  $\{Z_k\}$  Variablen mit  $\mathbb{P}[Z_k = 1] = \mathbb{P}[Z_k = 0] = \frac{1}{2}$ .
- i) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{P}[Z_k = i \mid Z_\ell = j] = \mathbb{P}[Z_\ell = j \mid Z_k = i]$ .
- ii) Können Sie daraus schliessen, dass die  $Z_k$  unabhängig sind? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Die Variablen  $(X, Y)$  sind absolutstetig mit der Dichte

$$f(x, y) = \left\{ \frac{1}{\max\{x, y\}} - 1 \right\} \mathbb{1}_{(x, y) \in (0, 1)^2}.$$

- a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Randdichten durch  $f_X(x) = -\mathbb{1}_{x \in (0, 1)} \ln x$  und  $f_Y(y) = -\mathbb{1}_{y \in (0, 1)} \ln y$  gegeben sind.

- b) (9 Punkte)  $X$  wird beobachtet. Wie lautet die beste lineare Prognose von  $Y$ ?

**Hinweis:**  $\mathbb{E}[XY] = \iint xy f(x, y) \, dy \, dx$ .

$$\int_0^1 x^n (\ln x) \, dx = \frac{-1}{(n+1)^2}.$$

3. Bei einer Bürgermeisterwahl in einem fernen Land erreicht der amtierende Bürgermeister 70% der Stimmen. Eine Journalistin vermutet Wahlbetrug und befragt 50 zufällig ausgewählte Stimmende. Nur 23 davon haben den Bürgermeister gewählt. Sie wählt das Signifikanz-Niveau 5%.

- a) (6 Punkte) Stützt die Umfrage die Vermutung der Journalistin?
- b) (6 Punkte) Kann die Journalistin mit Ihrer Umfrage auch (auf dem 5%-Niveau) nachweisen, dass der Bürgermeister nicht gewählt wurde; also weniger als 50% der Stimmen hatte?

Geben Sie jeweils auch Hypothese und Alternative an.

**Hinweis:** Verwenden Sie eine geeignete Approximation.

# Quantile der Normalverteilung

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q(P)}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{P}{100} .$$

P	q(P)	P	q(P)	P	q(P)	P	q(P)	P	q(P)	P	q(P)
50	0.0000	5.0	1.6449	3.0	1.8808	2.0	2.0537	1.0	2.3263	0.10	3.0902
45	0.1217	4.8	1.6646	2.9	1.8957	1.9	2.0749	0.9	2.3656	0.09	3.1214
40	0.2533	4.6	1.6849	2.8	1.9110	1.8	2.0969	0.8	2.4089	0.08	3.1559
35	0.3853	4.4	1.7060	2.7	1.9268	1.7	2.1201	0.7	2.4573	0.07	3.1947
30	0.5244	4.2	1.7279	2.6	1.9431	1.6	2.1444	0.6	2.5121	0.06	3.2389
25	0.6745	4.0	1.7507	2.5	1.9600	1.5	2.1701	0.5	2.5758	0.05	3.2905
20	0.8416	3.8	1.7744	2.4	1.9774	1.4	2.1973	0.4	2.6521	0.01	3.7190
15	1.0364	3.6	1.7991	2.3	1.9954	1.3	2.2262	0.3	2.7478	0.005	3.8906
10	1.2816	3.4	1.8250	2.2	2.0141	1.2	2.2571	0.2	2.8782	0.001	4.2649
5	1.6449	3.2	1.8522	2.1	2.0335	1.1	2.2904	0.1	3.0902	0.0005	4.4172