Klausur

1. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum und μ eine endliche additive Mengenfunktion auf $\mathcal{F}$. Das heisst, $\mu(\Omega) < \infty$ und für disjunkte Mengen A und B gilt, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Dies bedeutet insbesondere, dass $\mu(\emptyset) = 0$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) μ ist ein Mass.

b) Sind $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$, so gilt $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

c) Sind $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$, so dass $A_n \subset A_{n+1}$, so gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$.

d) Sind $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$, so dass $A_{n+1} \subset A_n$, so gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$.

e) Sind $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$, so dass $A_{n+1} \subset A_n$ und $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, so gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

2. Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei nicht identische Dichten von Verteilungsfunktionen bezüglich eines Masses μ auf $\mathbb{R}$. $X_1, X_2, \dots$ seien iid Zufallsvariablen mit der Dichte $f(x)$. Die beiden Dichten haben den gleichen Träger, das heisst wir dürfen annehmen, dass $g(x) > 0$ und $f(x) > 0$ μ-fast sicher. Wir bilden den Likelihoodkoeffizienten

$$R_n = \frac{g(X_1) \cdots g(X_n)}{f(X_1) \cdots f(X_n)} \; .$$

Weiter definieren wir die Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots X_n)$. Seien α, β zwei Zahlen aus $(0, 1)$ und $T = \inf\{n : R_n > \alpha^{-1} \text{ oder } R_n < \beta\}$. T ist dann eine Stoppzeit.

a) Zeigen Sie, dass $\{R_n\}$ ein Martingal ist.

b) Zeigen Sie, dass R_n (f.s.) nach Null konvergiert.

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[R_T] \le 1$.

Wir testen nun die Hypothese H_0: "die Dichte ist $f(x)$" gegen die Alterative H_A: "die Dichte ist $g(x)$." Wir akzeptieren H_A, falls $R_T > \alpha^{-1}$, und wir behalten H_0 bei, falls $R_T < \beta$.

d) Zeigen Sie, dass das Niveau des Testes mindestens α ist, i.e. $\mathbb{P}_{H_0}[R_T > \alpha^{-1}] < \alpha$.

e) Schliessen Sie, dass falls $g(x)$ anstelle von $f(x)$ die Dichte der Verteilung von $\{X_i\}$ ist, dass das Niveau des Testes mindestens β beträgt, das heisst $\mathbb{P}_{H_1}[R_T < \beta] < \beta$.
Hinweis: Betrachten Sie den Prozess $\{R_n^{-1}\}$.

3. **a)** Sei $r > 0$ und $g(x)$ eine endliche fallende Funktion, so dass $\int_0^\infty \mathrm{e}^{rx}|g(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. Wir wollen zeigen, dass $z(x) = \mathrm{e}^{rx}g(x)$ direkt Riemann integrierbar ist. Zeigen Sie, dass für $h > 0$

$$\mathrm{e}^{-2rh}\int_h^\infty \mathrm{e}^{rx}g(x)\,\mathrm{d}x \le \underline{\sigma}(h) \le \bar{\sigma}(h) \le \mathrm{e}^{2rh}\int_0^\infty \mathrm{e}^{rx}g(x)\,\mathrm{d}x + h\mathrm{e}^{rh}g(0)\;,$$

und schliessen Sie, dass $z(x)$ direkt Riemann integrierbar ist.
Hinweis: Schätzen Sie $\sup\{z(t) : (k-1)h \le t < kh\}$ und $\inf\{z(t) : (k-1)h \le t < kh\}$ nach oben bezw. nach unten ab.

Wir betrachten nun die Variable $B(t) = T_{N_t+1} - t$, die Zeit bis zum nächsten Ereignis. Wir interessieren uns für die Funktion $f(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-rB(t)}]$ für ein $r \ge 0$. Wir nehmen an, dass die Verteilung von $F(y)$ von Y_i nicht arithmetisch ist.

b) Zeigen Sie, dass $f(t)$ eine Erneuerungsgleichung erfüllt.

c) Finden Sie $\lim_{t\to\infty} f(t)$.