Lösung der Klausur

1. Durch Induktion folgt, dass für paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$\mu(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

“a) $\Rightarrow$ b)” Dies ist eine Eigenschaft des Masses.

“b) $\Rightarrow$ c)” Setzen wir $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$. Die Folge $\mu(A_n)$ ist monoton, da $\mu(A_{n+1}) = \mu(A_n) + \mu(B_{n+1}) \geq \mu(A_n)$. Somit gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \leq \mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$. Weiter haben wir

$$\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

Wäre $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \infty$, dann wäre $\mu(A_m) = \sum_{n=1}^m \mu(B_n) > \mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$ für ein $m \in \mathbb{N}$, was nicht sein kann. Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=m+1}^{\infty} \mu(B_n) < \varepsilon$. Wir haben dann

$$\mu(A_m) = \sum_{n=1}^m \mu(B_n) > \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) - \varepsilon \geq \mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) - \varepsilon.$$

Somit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \geq \mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$.

“c) $\Rightarrow$ d)” Wir haben $\mu(A_n) = \mu(\Omega) - \mu(A_n^c)$, und $A_n^c \subset A_{n+1}^c$. Also

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) &= \mu(\Omega) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n^c) = \mu(\Omega) - \mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c) = \mu(\{\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c\}^c) \\ &= \mu(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n). \end{aligned}$$

“d) $\Rightarrow$ e)” Aus $\mu(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset)$ folgt, dass $\mu(\emptyset) = 0$. Somit folgt die Aussage aus d).

“e) $\Rightarrow$ a)” Seien $\{B_n\}$ paarweise disjunkt. Wir setzen $A = \{\cup_{m \in \mathbb{N}} B_m\}$ und $A_n = A \setminus \{\cup_{m=1}^n B_m\} = \{\cup_{m=n+1}^{\infty} B_m\}$. Dann ist $A_{n+1} \subset A_n$ und $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Somit haben wir $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$. Insbesondere ist

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^n \mu(B_k) + \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(B_k) + \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k).$$

Also ist μ ein Mass.

2. a) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= R_n \mathbb{E}\left[\frac{g(X_{n+1})}{f(X_{n+1})} \mid \mathcal{F}_n\right] = R_n \int \frac{g(x)}{f(x)} f(x) \, d\mu \\ &= R_n \int g(x) \, d\mu = R_n .\end{aligned}$$

Da R_n positiv ist, folgt mit Induktion, dass R_n integrierbar ist. Dass R_n adaptiert ist, ist klar.

b) Als positives Martingal konvergiert $\{R_n\}$ gegen einen Grenzwert R_∞ . Da f und g nicht identisch sind, ist $\mathbb{P}[|1 - g(X_n)/f(X_n)| > \varepsilon] > 0$ für ein $\varepsilon > 0$. Aus dem Borel–Cantelli-Lemma folgt, dass $|1 - g(X_n)/f(X_n)| > \varepsilon$ unendlich oft gilt. Aber $R_{n+1} = R_n g(X_{n+1})/f(X_{n+1})$ kann dann nur dann gegen einen endliche Grenzwert konvergieren, falls der Grenzwert 0 ist.

c) Das Lemma von Fatou ergibt $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[R_{T \wedge n}] \geq \mathbb{E}[R_T]$.

d) Da R_n nach 0 konvergiert, ist T unter H_0 endlich. Also gilt

$$\begin{aligned}1 &\geq \mathbb{E}[R_T] = \mathbb{E}[R_T; R_T < \beta] + \mathbb{E}[R_T; R_T > \alpha^{-1}] \\ &> \mathbb{E}[R_T; R_T < \beta] + \alpha^{-1} \mathbb{P}[R_T > \alpha^{-1}] \geq \alpha^{-1} \mathbb{P}[R_T > \alpha^{-1}] .\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

e) Durch vertauschen von f und g müssen wir unter $\mathbb{P}_{H_1}$ den Prozess $\{R_n^{-1}\}$ betrachten. Aus dem vorhergehenden Resultat folgt

$$\mathbb{P}_{H_1}[R_T < \beta] = \mathbb{P}_{H_1}[R_T^{-1} > \beta^{-1}] < \beta .$$

3. a) Da $g(x)$ fallend ist, muss $g(x)$ in $[-\infty, \infty)$ konvergieren. Aus der Endlichkeit des Integrals, folgt, dass $g(x)$ nach Null konvergiert, und daher positiv ist. Wir haben

$$\begin{aligned}\sup\{z(t) : (k-1)h \leq t < kh\} &\leq e^{rkh} g((k-1)h) \leq e^{2rh} e^{r(k-2)h} g((k-1)h) \\ &\leq e^{2rh} \inf\{z(t) : (k-2)h \leq t < (k-1)h\} .\end{aligned}$$

Damit können wir die Obersumme abschätzen

$$\bar{\sigma}(h) \leq h e^{rh} g(0) + e^{2rh} \underline{\sigma}(h) \leq h e^{rh} g(0) + e^{2rh} \int_0^\infty e^{rx} g(x) \, dx .$$

Analog folgt für die Untersumme

$$\underline{\sigma}(h) \geq e^{-2rh} (\bar{\sigma}(h) - h \sup\{z(t) : 0 \leq t < h\}) \geq e^{-2rh} \int_0^h e^{rx} g(x) \, dx .$$

Lassen wir $h \downarrow 0$, so folgt

$$\int_0^\infty e^{rx} g(x) dx \leq \lim_{h \downarrow 0} \underline{\sigma}(h) \leq \lim_{h \downarrow 0} \bar{\sigma}(h) \leq \int_0^\infty e^{rx} g(x) dx .$$

Somit ist $z(x)$ direkt Riemann integrierbar.

- b) Wir bedingen auf T_1 . Für $T_1 > t$, so kennen wir $e^{-r(T_1-t)}$. Ist $T_1 \leq t$, so suchen wir $f(t - T_1)$. Dies ergibt

$$f(t) = \int_t^\infty e^{-r(s-t)} dF(s) + \int_0^t f(t-s) dF(s) .$$

Dies ist eine Erneuerungsgleichung.

- c) Schreiben wir $z(t) = e^{rt} \int_t^\infty e^{-rs} dF(s)$, so ist $g(t) = \int_t^\infty e^{-rs} dF(s)$ eine fallende Funktion. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-r(s-t)} dF(s) dt &= \int_0^\infty \int_0^s e^{-r(s-t)} dt dF(s) \\ &= \int_0^\infty \frac{1 - e^{-rs}}{r} dF(s) < \infty . \end{aligned}$$

Somit ist $z(t)$ direkt Riemann integrierbar. Somit erhalten wir den Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) &= \lambda \int_0^\infty \frac{1 - e^{-rs}}{r} dF(s) = \lambda \int_0^\infty \int_0^s e^{-rt} dt dF(s) \\ &= \lambda \int_0^\infty (1 - F(t)) e^{-rt} dt . \end{aligned}$$

Dies ist (nicht überraschend) die Laplace-transformierte der asymptotischen Verteilung.