Nachklausur

1. Sei Ω eine Menge und $\mathcal{A} \subset \Omega$ eine Klasse von Teilmengen, so dass

i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

ii) Sind $A, B \in \mathcal{A}$, so ist $B \setminus A$ eine endliche disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{A}$,

iii) Sind $A, B \in \mathcal{A}$, so ist $A \cap B \in \mathcal{A}$.

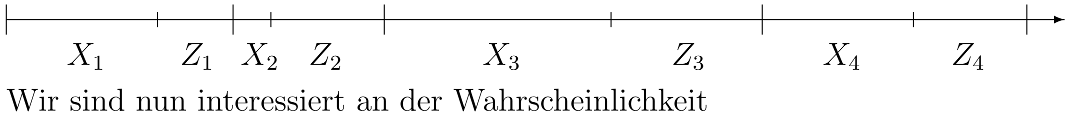
Seien weiter μ und ν zwei σ-endliche Masse auf $\sigma(\mathcal{A})$, so dass $\mu(A) \le \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass $\mu(A) \le \nu(A)$ für alle $A \in \sigma(\mathcal{A})$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie den Beweis des Fortsetzungssatzes.

2. Seien $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ iid Variablen mit $\mathbb{E}[X_n] \ge 0$. Sei $\theta(r) = \log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{rX_n}]$. Wir nehmen an, dass es ein $r_0 > 0$ gibt, so dass $\theta(r) < \infty$ für $0 \le r < r_0$ und $\lim_{r \uparrow r_0} \theta(r) = \infty$. Wir bezeichnen mit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ die zu $\{X_n\}$ gehörige Irrfahrt. Sei nun für $x > 0$ $\tau(x) = \inf\{n : S_n \ge x\}$. Die Variable $\tau(x)$ ist dann eine Stoppzeit.

a) Zeigen Sie, dass für $0 \le r < r_0$ der Prozess $\{\exp\{rS_n - n\theta(r)\}\}$ ein Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ ist.

b) Sei $\beta > 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\beta\tau(x)}] \le \mathrm{e}^{-rx}$, wobei $r > 0$ die positive Lösung der Gleichung $\theta(r) = \beta$ ist.
Hinweis: Es gilt $\mathbb{E}[M_{\tau \wedge n}] = \mathbb{E}[M_\tau \mathbb{1}_{\tau \le n}] + \mathbb{E}[M_n \mathbb{1}_{\tau > n}]$.

3. Seien $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ zwei Folgen von iid positiven Variablen mit Verteilungsfunktion $F_X(x)$ und $F_Z(x)$. Alle Variablen seien unabhängig. Die Mittelwerte μ_X und μ_Z seien endlich. Wir setzen $Y_n = X_n + Z_n$. Der Einfachheit halber sei die Verteilung von Y_n nicht arithmetisch.



Wir sind nun interessiert an der Wahrscheinlichkeit

$$f(t) = \mathbb{P}\Bigl[\exists n : \sum_{k=1}^n Y_k \le t < X_{n+1} + \sum_{k=1}^n Y_k\Bigr] ,$$

also die Wahrscheinlichkeit, dass zur Zeit t eine X-Periode ist. Wir setzen wie üblich $\sum_{k=1}^{0} Y_k = 0$.

a) Zeigen Sie, dass $f(t)$ eine Erneuerungsgleichung erfüllt.

b) Bestimmen Sie $\lim_{t\to\infty} f(t)$. Begründen Sie insbesondere, dass der Grenzwert existiert.