Lösung der Nachklausur

1. Wir bezeichnen mit $\mathcal{U}(A)$ die Menge der abzählbaren Überdeckungen von A mit Mengen aus $\mathcal{A}$. Da $\mathcal{A}$ und μ, bzw. ν die Voraussetzungen des Fortsetzungssatzes erfüllen, haben wir für alle $A \in \sigma(\mathcal{A})$

$$\mu(A) = \inf\Bigl\{\sum_{n=1}^\infty \mu(B_n) : \{B_n\} \in \mathcal{U}(A)\Bigr\} ,$$
$$\nu(A) = \inf\Bigl\{\sum_{n=1}^\infty \nu(B_n) : \{B_n\} \in \mathcal{U}(A)\Bigr\} .$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\{B_n\} \in \mathcal{U}(A)$, so dass $\nu(A) > \sum_{n=1}^\infty \nu(B_n) - \varepsilon$. Damit ist

$$\mu(A) \le \sum_{n=1}^\infty \mu(B_n) \le \sum_{n=1}^\infty \nu(B_n) < \nu(A) + \varepsilon .$$

Da ε beliebig war, gilt $\mu(A) \le \nu(A)$.

2. a) Aus $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{rS_n}] = \mathbb{E}[\prod_{k=1}^n \mathrm{e}^{rX_k}] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[\mathrm{e}^{rX_k}] < \infty$ folgt die Integrierbarkeit. Es ist auch klar, dass der Prozess adaptiert ist. Weiter haben wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp\{rS_{n+1} - (n+1)\theta(r)\} \mid \mathcal{F}_n] &= \exp\{rS_n - (n+1)\theta(r)\}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{rX_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n]\\ &= \exp\{rS_n - (n+1)\theta(r)\}\mathrm{e}^{\theta(r)} = \exp\{rS_n - n\theta(r)\} .\end{aligned}$$

Somit handelt es um ein Martingal.

b) Wir bemerken, dass $S_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Somit ist $\tau(x) < \infty$. Weiter haben wir

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\beta\tau(x)}]\mathrm{e}^{rx} = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{rx-\beta\tau(x)}] \le \mathbb{E}[\mathrm{e}^{rS_{\tau(x)}-\beta\tau(x)}] .$$

Aus dem Stoppsatz erhalten wir

$$1 = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{rS_{\tau(x)\wedge n}-\beta(\tau(x)\wedge n)}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{rS_{\tau(x)}-\beta\tau(x)}\mathbb{1}_{\tau(x)\le n}] + \mathbb{E}[\mathrm{e}^{rS_n-\beta n}\mathbb{1}_{\tau(x)>n}] .$$

Lassen wir $n \to \infty$, so konvergiert der erste Term wegen der monotonen Konvergenz nach $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{rS_{\tau(x)}-\beta\tau(x)}]$. Der zweite Term ist durch e^{rx} beschränkt. Somit konvergiert dieses wegen der beschränkten Konvergenz nach Null. Also ist

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\beta\tau(x)}]\mathrm{e}^{rx} \le 1 ,$$

was äquivalent zur Behauptung ist.

3. **a)** Der Prozess $\{Y_n\}$ ist ein Erneuerungsprozess. Nehmen wir an, wir kennen X_1 und Z_1. Ist $X_1 > t$, so liegt t in einer X-Periode. Ist $X_1 \le t$ und $X_1 + Z_1 > t$, so liegt t in einer Z-Periode. Ist $X_1 + Z_1 = s \le t$, so haben wir eine Erneuerung und damit ist die gesuchte (bedingte) Grösse $f(t-s)$. Insgesamt erhalten wir

$$f(t) = 1 \cdot (1 - F_X(t)) + 0 \cdot \mathbb{P}[X_1 < t \le X_1 + Z_1] + \int_0^t f(t-s)\, \mathrm{d}F_Y(s) \,,$$

was eine Erneuerungsgleichung ist.

b) Wir haben angenommen, dass F_Y nicht arithmetisch ist. $1 - F_X(t)$ ist fallend und $\int_0^\infty 1 - F_X(t)\ \mathrm{d}t = \mu_X < \infty$. Somit ist $1 - F_X(t)$ direkt Riemann integrierbar. Nach dem Erneuerungstheorem erhalten wir somit

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{\mu_X}{\mu_Y} = \frac{\mu_X}{\mu_X + \mu_Z} \,.$$