Klausur 27. Juli 2009

1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, E_1, E_2 metrische separable Räume, ausgestattet mit den Borel σ-Algebren $\mathfrak{B}(E_i)$. Sei weiter X eine Zufallsvariable mit Werten in E_1 und $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ eine sub-σ-Algebra. Zeigen Sie, dass es zu jeder beschränkten $\mathfrak{B}(E_1) \times \mathcal{H}$-messbaren Funktion $\psi : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte $\mathfrak{B}(E_2) \times \mathcal{H}$-messbare Funktion $\varphi : E_2 \times \Omega \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\mathbb{E}[\psi(X, Y) \mid \mathcal{H}](\omega) = \varphi(Y(\omega), \omega)$$

für jede $\mathcal{H}$-messbare Zufallsvariable Y mit Werten in E_2.

2. Sei $\{L_t\}$ ein Martingal mit $L_t > 0$ und $\mathbb{E}[L_t] = 1$. Wir definieren das Mass $\mathbb{P}^*[A] = \mathbb{E}[L_t; A]$ für alle $A \in \mathcal{F}_t$ für ein t. Sei nun Z eine $\mathcal{F}_s$-messbare Zufallsvariable, und $t < s$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}^*[Z \mid \mathcal{F}_t] = L_t^{-1} \mathbb{E}[L_s Z \mid \mathcal{F}_t] \; .$$

b) Zeigen Sie, dass $\{L_t^{-1}\}$ ein Martingal bezüglich dem Mass $\mathbb{P}^*$ ist.

3. Sei $\{N_t\}$ ein (gewöhnlicher) Erneuerungsprozess mit Ereigniszeiten $T_1, T_2, \ldots$ und bezeichnen wir mit $F(t)$ die Verteilungsfunktion der Zwischenankunftszeiten. Seien $\{Z_k : k \in \mathbb{N}\}$ iid Variablen, $\mathbb{P}[Z_k > 0] = 1$, $\mathbb{E}[Z_k] = \mu \in (0, \infty)$ und $\lambda^{-1} = \mathbb{E}[T_1] < \infty$. Der Prozess

$$S_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k \mathrm{e}^{-\beta(t - T_k)}$$

heisst *Shot-Noise-Prozess*, wobei $\beta > 0$ eine Konstante ist. Wir interessieren uns nun für $f(t) = \mathbb{E}[S_t]/\mu$.

a) Zeigen Sie, dass $f(t)$ die Erneuerungsgleichung

$$f(t) = z(t) + \int_0^t f(t - s) \, \mathrm{d}F(s)$$

erfüllt.

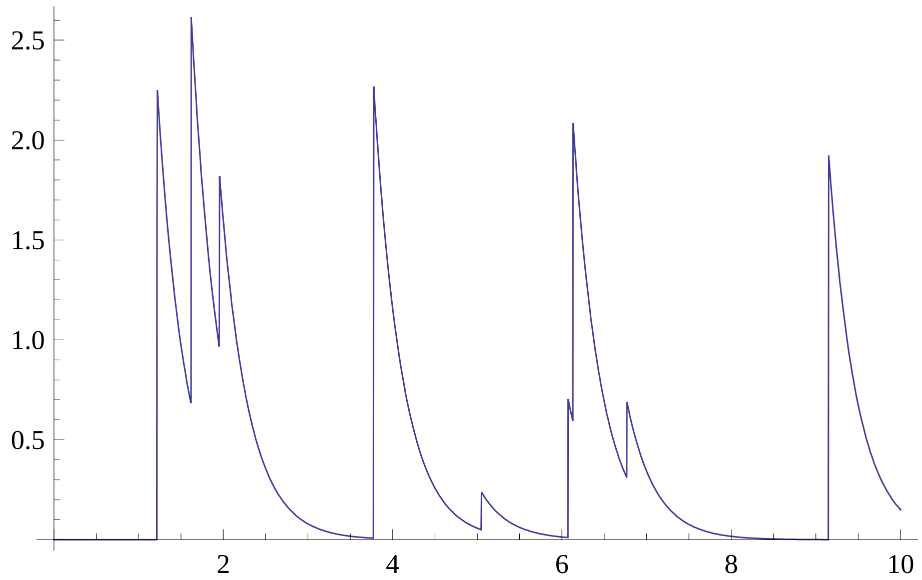

Abbildung 1: Pfad eines Shot-Noise-Prozesses

b) Zeigen Sie, dass

$$z(t) = \mathrm{e}^{-\beta t} - (1 - F(t)) + \beta \int_0^t (1 - F(t - v))\mathrm{e}^{-\beta v}\, \mathrm{d}v$$

gilt.

c) Zeigen Sie, dass $z(t)$ direkt Riemann integrierbar ist.
Hinweis: Teilen Sie das Integral in die Integrationsbereiche $(0, t/2]$ und $(t/2, t]$ auf und schätzen Sie einen Teil des Integranden ab, so dass der Rest integrierbar bleibt.

Wir nehmen an, dass $F(t)$ nicht arithmetisch ist.

d) Bestimmen Sie $\lim_{t\to\infty} f(t)$.
Hinweis: Verwenden Sie die Form von $z(t)$, die Sie vor der Umformung erhalten haben.