Lösung der Klausur

1. Wir setzen $\mathcal{B} = \{A \times B : A \in \mathfrak{B}(E_1), B \in \mathcal{H}\}$ und mit $\mathcal{G}$ bezeichnen wir die Menge der beschränkten $\mathfrak{B}(E_1) \times \mathcal{H}$ -messbaren Funktionen, für die die Aussage gilt. Seien ψ_1, ψ_2 zwei Funktionen aus $\mathcal{G}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\psi_1(X, Y) + \psi_2(X, Y) \mid \mathcal{H}](\omega) &= \mathbb{E}[\psi_1(X, Y) \mid \mathcal{H}](\omega) + \mathbb{E}[\psi_2(X, Y) \mid \mathcal{H}](\omega) \\ &= \varphi_1(Y(\omega), \omega) + \varphi_2(Y(\omega), \omega) . \end{aligned}$$

Also ist auch $\psi_1 + \psi_2 \in \mathcal{G}$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[\alpha\psi_1(X, Y) \mid \mathcal{H}](\omega) = \alpha\mathbb{E}[\psi_1(X, Y) \mid \mathcal{H}](\omega) = \alpha\varphi_1(Y(\omega), \omega) .$$

Somit ist auch $\alpha\psi_1 \in \mathcal{G}$. Das heisst, $\mathcal{G}$ ist ein linearer Raum.

Die Menge $\mathcal{B}$ ist durchschnittsabgeschlossen. Sei $A \times B \in \mathcal{B}$. Mit den Eigenschaften der bedingten Erwartung gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A \times B}(X, Y) \mid \mathcal{H}](\omega) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)\mathbb{1}_B(Y) \mid \mathcal{H}](\omega) \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X) \mid \mathcal{H}](\omega)\mathbb{1}_B(Y(\omega)) . \end{aligned}$$

Dies ist eine $\mathfrak{B}(E_2) \times \mathcal{H}$ -messbare Funktion. Wenn man eine Version der bedingten Erwartung wählt, die Werte in $[0, 1]$ annimmt, ist die Funktion beschränkt und damit ist $\mathbb{1}_{A \times B} \in \mathcal{G}$.

Ist ψ eine positive Funktion, so kann man $\mathbb{E}[\psi(X, Y) \mid \mathcal{H}](\omega)$ positiv wählen. Wir nehmen daher an, dass φ positiv ist, wenn ψ positiv ist. Sei nun $\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{G}$ mit $\psi_n \leq c$ und $\psi_n \leq \psi_{n+1}$. Wir setzen $\psi = \lim_n \psi_n$. Wir können nun annehmen, dass $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$, da

$$0 \leq \mathbb{E}[\psi_{n+1}(X, Y) - \psi_n(X, Y) \mid \mathcal{H}](\omega) = \varphi_{n+1}(Y(\omega), \omega) - \varphi_n(Y(\omega), \omega) .$$

Da die Folge monoton ist, existiert $\varphi = \lim_n \varphi_n$. Wir können $\varphi_n \leq c$ wählen, woraus $\varphi \leq c$ folgt. Somit ist φ beschränkt und $\mathfrak{B}(E_2) \times \mathcal{H}$ -messbar (Proposition 1.15). Es gilt wegen der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\psi(X, Y) \mid \mathcal{H}](\omega) &= \mathbb{E}[\lim_n \psi_n(X, Y) \mid \mathcal{H}](\omega) = \lim_n \mathbb{E}[\psi_n(X, Y) \mid \mathcal{H}](\omega) \\ &= \lim_n \varphi_n(Y(\omega), \omega) = \varphi(Y(\omega), \omega) . \end{aligned}$$

Somit ist auch $\psi = \lim_n \psi_n \in \mathcal{G}$. Aus dem Satz 1.20 folgt nun, dass $\mathcal{G}$ alle $\mathfrak{B}(E_1) \times \mathcal{H}$ -messbaren Funktionen enthält, da nach Definition $\mathcal{B}$ die Produkt- σ -Algebra $\mathfrak{B}(E_1) \times \mathcal{H}$ erzeugt.

2. a) Wir bemerken zuerst, dass $L_t^{-1}\mathbb{E}[L_s Z | \mathcal{F}_t]$ $\mathcal{F}_t$ -messbar ist, da L_t als Martingal $\mathcal{F}_t$ messbar ist, und der bedingte Erwartungswert $\mathcal{F}_t$ -messbar ist. Sei Y eine $\mathcal{F}_t$ -messbare Zufallsvariable. Wir haben dann

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*[Y L_t^{-1} \mathbb{E}[L_s Z | \mathcal{F}_t]] &= \mathbb{E}[Y \mathbb{E}[L_s Z | \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y L_s Z | \mathcal{F}_t]] \\ &= \mathbb{E}[Y L_s Z] = \mathbb{E}^*[Y Z].\end{aligned}$$

Somit ist nach der Definition der bedingten Erwartung $L_t^{-1}\mathbb{E}[L_s Z | \mathcal{F}_t]$ eine Version des bedingten Erwartungswertes.

- b) Wir haben dass L_t^{-1} $\mathcal{F}_t$ -messbar ist. Weiter gilt $\mathbb{E}^*[[L_t^{-1}]] = \mathbb{E}^*[L_t^{-1}] = \mathbb{E}[L_t^{-1}L_t] = 1$. Also ist L_t^{-1} integrierbar. Die Martingaleigenschaft folgt aus

$$\mathbb{E}^*[L_s^{-1} | \mathcal{F}_t] = L_t^{-1} \mathbb{E}[L_s L_s^{-1} | \mathcal{F}_t] = L_t^{-1}.$$

Also ist $\{L_t^{-1}\}$ ein Martingal bezüglich $\mathbb{P}^*$.

3. Wir bemerken zuerst, dass wir $\mu = 1$ annehmen können.

- a) Sei der erste Schaden zur Zeit T_1 . Ist $T_1 > t$, so ist $S_t = 0$. Ist $T_1 \leq t$, so ist

$$S_t = Z_1 e^{-\beta(t-T_1)} + \sum_{k=2}^{N_t} Z_k e^{-\beta[(t-T_1)-(T_k-T_1)]}.$$

Der zweite Term ist ein Shot-Noise-Prozess, der zur Zeit T_1 startet. Durch Integration über T_1 erhalten wir

$$\begin{aligned}f(t) &= \int_0^t [e^{-\beta(t-s)} + f(t-s)] dF(s) + \int_t^\infty 0 dF(s) \\ &= \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dF(s) + \int_0^t f(t-s) dF(s).\end{aligned}$$

- b) Wir erhalten

$$\begin{aligned}z(t) &= \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dF(s) = F(t) - \beta \int_0^t \int_0^{t-s} e^{-\beta v} dv dF(s) \\ &= F(t) - \beta \int_0^t \int_0^{t-v} dF(s) e^{-\beta v} dv \\ &= e^{-\beta t} - (1 - F(t)) + \beta \int_0^t e^{-\beta v} dv - \beta \int_0^t F(t-v) e^{-\beta v} dv \\ &= e^{-\beta t} - (1 - F(t)) + \beta \int_0^t (1 - F(t-v)) e^{-\beta v} dv.\end{aligned}$$

- c) Die ersten beiden Terme sind monoton und $\int_0^\infty e^{-\beta t} dt = \beta^{-1}$, $\int_0^\infty (1 - F(t)) dt = \lambda^{-1}$. Also sind die ersten beiden Terme direkt Riemann integrierbar. Weiter gilt

$$\beta \int_0^{t/2} (1 - F(t - v))e^{-\beta v} dv \leq (1 - F(t/2)) \int_0^{t/2} e^{-\beta v} dv \leq 1 - F(t/2).$$

Somit kann $\int_0^{t/2}$ durch eine direkt Riemann integrierbare Majorante abgeschätzt werden und ist somit direkt Riemann integrierbar. Der zweite Teil des Integrals ist

$$\begin{aligned} \beta \int_{t/2}^t (1 - F(t - v))e^{-\beta v} dv &= \beta \int_0^{t/2} (1 - F(s))e^{-\beta(t-s)} ds \\ &\leq \beta e^{-\beta t/2} \int_0^{t/2} (1 - F(s)) ds \leq \lambda^{-1} \beta e^{-\beta t/2}. \end{aligned}$$

Somit kann auch $\int_{t/2}^t$ durch eine direkt Riemann integrierbare Majorante abgeschätzt werden und ist somit direkt Riemann integrierbar. Als Summe von direkt Riemann integrierbaren Funktionen ist $z(t)$ direkt Riemann integrierbar.

- d) Wir müssen

$$\int_0^\infty \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dF(s) dt = \int_0^\infty \int_s^\infty e^{-\beta(t-s)} dt dF(s) = \int_0^\infty \beta^{-1} dF(s) = \beta^{-1}$$

berechnen. Nach dem Erneuerungssatz erhalten wir $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lambda/\beta$.