Lösung der Nachklausur

1. **a)** $\{f(X_{\tau\wedge n})\}$ ist ein Martingal, das nach unten beschränkt ist. Somit folgt aus dem Konvergenzsatz, dass der Grenzwert existiert und integrierbar ist.

b) Da $f(x)$ auf $[0,\infty)$ echt wachsend ist und $f(X_{\tau\wedge n})\}$ konvergiert, folgt dass

$$\mathbb{P}[\{\tau<\infty\}\cup\{\exists \lim_{n\to\infty} X_n\in[0,\infty],\tau=\infty\}]=1\;.$$

Wir müssen also zeigen, dass der Grenzwert auf $\{\tau=\infty\}$ nicht endlich sein kann. Da

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}[|X_{k+1}-X_k|>\varepsilon\mid\mathcal{F}_k]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta=\infty\;,$$

folgt aus dem Borel–Cantelli-Lemma, dass $\{|X_{k+1}-X_k|>\varepsilon\}$ unendlich oft eintritt. Somit kann X_k nicht gegen einen endlichen Wert konvergieren, das heisst, $X_k\to\infty$ auf $\{\tau=\infty\}$.

c) Es gilt

$$\mathbb{E}[f(X_\tau)]=0\cdot\mathbb{P}[\tau<\infty]+f(\infty)\mathbb{P}[\tau=\infty]=f(\infty)\mathbb{P}[\tau=\infty]\;.$$

i) Ist $f(\infty)=\infty$, so kann $\mathbb{E}[f(X_\tau)]<\infty$ nur gelten, falls $\mathbb{P}[\tau=\infty]=0$. Das heisst, $\mathbb{P}[\tau<\infty]=1$.

ii) Ist $f(\infty)<\infty$, so ist $\{f(X_{\tau\wedge n})\}$ ein beschränktes Martingal. Wir dürfen somit Grenzwert und Erwartungswert vertauschen. Aus der Martingaleigenschaft erhalten wir

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[f(X_{\tau\wedge n})]=\mathbb{E}[f(X_\tau)]=f(\infty)\mathbb{P}[\tau=\infty]\;.$$

Das bedeutet

$$\mathbb{P}[\tau<\infty]=1-\mathbb{P}[\tau=\infty]=1-f(x)/f(\infty)\;.$$

2. **a)** Ist $T_1>t$, so gibt es keine Punkte in $(t-1,t]$. Ist $T_1\le t$, so betrachten wir den Erneuerungsprozess $T_2-T_1,T_3-T_1,\dots$ und, bedingt auf (T_1,E_1)

ist der gesuchte Erwartungswert $f(t-T_1) + \mathbb{1}_{T_1+E_1 \in (t-1,t]}$. Wir erhalten also durch Bedingen auf (T_1, E_1),

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{(t-1)^+} (\mathrm{e}^{-(t-1-s)} - \mathrm{e}^{-(t-s)} + f(t-s))\, \mathrm{d}F(s) \\ &\quad + \int_{(t-1)^+}^t (1 - \mathrm{e}^{-(t-s)} + f(t-s))\, \mathrm{d}F(s) + \int_t^\infty 0\, \mathrm{d}F(s) \\ &= \int_0^{(t-1)^+} (\mathrm{e}^{-(t-1-s)} - \mathrm{e}^{-(t-s)})\, \mathrm{d}F(s) + \int_{(t-1)^+}^t (1 - \mathrm{e}^{-(t-s)})\, \mathrm{d}F(s) \\ &\quad + \int_0^t f(t-s)\, \mathrm{d}F(s)\ . \end{aligned}$$

b) Betrachten wir das Integral $\int_0^{t/2}$. Dann ist

$$\int_0^{t/2} \mathrm{e}^{-(t-s)}\, \mathrm{d}F(s) \le \int_0^{t/2} \mathrm{e}^{-t/2}\, \mathrm{d}F(s) \le \mathrm{e}^{-t/2}\ .$$

Die rechte Seite ist monoton und integrierbar, also direkt Riemann integrierbar. Da die linke Seite bis auf die Punkte, wo $F(t)$ springt, stetig ist, ist die linke Seite direkt Riemann integrierbar. Betrachten wir nun das Integral $\int_{t/2}^t$. Dann ist

$$\int_{t/2}^t \mathrm{e}^{-(t-s)}\, \mathrm{d}F(s) \le F(t) - F(t/2) \le 1 - F(t/2)\ .$$

Da der Erwartungswert endlich ist, ist die rechte Seite integrierbar. Somit ist mit dem gleichen Argument wie oben, die linke Seite direkt Riemann integrierbar.

c) Die Funktion $z(t)$ ist stetig bis auf die Punkte, wo $F(t)$ springt. Also, bis auf abzählbar viele Punkte ist $z(t)$ stetig. Der erste Teil von $z(t)$ ist durch $\int_0^{(t-1)^+} \mathrm{e}^{-(t-1-s)}\, \mathrm{d}F(s)$ beschränkt, und damit direkt Riemann integrierbar. Der zweite Teil ist durch $F(t) - F((t-1)^+)$ beschränkt, was wiederum durch $1 - F((t-1)^+)$ beschränkt ist. Letzere Funktion ist direkt Riemann integrierbar. Damit ist auch $z(t)$ direkt Riemann integrierbar.

d) Da $z(t)$ direkt Riemann integrierbar ist, existiert der Grenzwert. Wir müssen das Integral berechnen.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \int_0^{t-1} (\mathrm{e}^{-(t-1-s)} - \mathrm{e}^{-(t-s)})\, \mathrm{d}F(s)\, \mathrm{d}t &= \int_0^\infty \int_{s+1}^\infty (\mathrm{e}^{-(t-1-s)} - \mathrm{e}^{-(t-s)})\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}F(s) \\ &= \int_0^\infty (1 - \mathrm{e}^{-1})\, \mathrm{d}F(s) = 1 - \mathrm{e}^{-1}\ . \end{aligned}$$

Weiter

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_{(t-1)^+}^t (1-\mathrm{e}^{-(t-s)})\, \mathrm{d}F(s)\, \mathrm{d}t &= \int_0^\infty \int_s^{s+1} (1-\mathrm{e}^{-(t-s)})\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}F(s) \\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-1}\, \mathrm{d}F(s) = \mathrm{e}^{-1}\;.\end{aligned}$$

Somit ist $\int_0^\infty z(t)\, \mathrm{d}t = 1$. Der Grenzwert von $f(t)$ wird also λ.

3. **a)** Mittels beschränkter Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}\lim_{z\to x} G * H(z) = \lim_{z\to x} \int_{-\infty}^\infty G(z-y)\, \mathrm{d}H(y) &= \int_{-\infty}^\infty \lim_{z\to x} G(z-y)\, \mathrm{d}H(y) \\ = \int_{-\infty}^\infty G(x-y)\, \mathrm{d}H(y) &= G * H(x)\;.\end{aligned}$$

b) Aus a) folgt, dass $S_n = 0$ nur dann möglich ist, wenn keine der Variablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ einen Wert im stetigen Bereich annimmt. Also muss $X_k \in \{-a, a\}$ gelten. Zu ungeraden Zeitpunkten kann 0 nicht erreicht werden. Zu geraden Zeitpunkten muss die Hälfte der Zeitpunkte a und die Hälfte der Zeitpunkte $-a$ angenommen werden. Es gibt $\binom{2n}{n}$ Möglichkeiten, die Zeitpunkte in $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ mit $X_k = a$ zu wählen. Die Wahrscheinlichkeit jeder dieser Möglichkeiten ist β^{2n}. Also ist

$$\mathbb{P}[S_{2n} = 0] = \binom{2n}{n} \beta^{2n}\;.$$

c) Nach dem Satz von Sparre Andersen benötigen wir $\mathbb{P}[S_n > 0]$. Aus der Symmetrie folgt, dass $\mathbb{P}[S_n > 0] = \frac{1}{2}(1 - \mathbb{P}[S_n = 0])$. Ist n ungerade, so folgt $\mathbb{P}[S_n = 0] = \frac{1}{2}$. Ist n gerade, so folgt $\mathbb{P}[S_n > 0] = \frac{1}{2}(1 - \binom{n}{n/2}\beta^n)$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}-\log(1-h(x)) = \sum_{n=1}^\infty x^n \frac{\mathbb{P}[S_n > 0]}{n} &= \sum_{n=1}^\infty \tfrac{1}{2} \frac{1}{n} x^n - \sum_{n=1}^\infty \tfrac{1}{2} \frac{1}{2n} \binom{2n}{n} \beta^{2n} x^{2n} \\ &= -\tfrac{1}{2} \log(1-x) - \tfrac{1}{4} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \binom{2n}{n} (\beta x)^{2n} \\ &= -\tfrac{1}{2}\big(\log(1-x) - \log(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-4\beta^2 x^2})\big) \\ &= -\tfrac{1}{2} \log\Big(\frac{2(1-x)}{1+\sqrt{1-4\beta^2x^2}}\Big)\;.\end{aligned}$$

Also folgt

$$h(x) = 1 - \sqrt{\frac{2(1-x)}{1+\sqrt{1-4\beta^2x^2}}}\;.$$