Klausur 19. Februar 2013

1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Massraum und $A \in \mathcal{F}$, so dass $\mu(A) < \infty$. Wir definieren $\mu_A : \mathcal{F} \rightarrow [0, \mu(A)]$, $B \mapsto \mu(A \cap B)$. Für eine messbare beschränkte Funktion f definieren wir die Integrale $\mu(f; A) = \int f \mathbb{1}_A d\mu$ und $\tilde{\mu}(f; A) = \int f d\mu_A$. Zeigen Sie, dass $\mu(f; A) = \tilde{\mu}(f; A)$ für alle beschränkten messbaren Funktionen f .

2. Sei M ein Martingal, so dass $\mathbb{E}[e^{M_n}] < \infty$ für alle n . Sei $T_x = \inf\{n : M_n \geq x\}$. Zeigen Sie:

a) Es gibt einen eindeutigen vorhersehbaren Prozess Z mit $Z_0 = 0$, so dass $\{e^{M_n - Z_n}\}$ ein Martingal ist.

b) Der Prozess Z ist wachsend.

c) Es gilt $\mathbb{E}[e^{M_0}] \geq \mathbb{E}[e^{M_{T_x} - Z_{T_x}}; T_x \leq n]$ und daher

$$\mathbb{P}[T_x < \infty] \leq \frac{\mathbb{E}[e^{M_0}]e^{-x}}{\mathbb{E}[e^{-Z_{T_x}} | T_x < \infty]}.$$

3. Sei $\mathcal{M}_b^+([0, \infty))$ die Menge aller beschränkten, positiven, messbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$. Für einen stochastischen Prozess X definieren wir für $f \in \mathcal{M}_b^+([0, \infty))$

$$L_X(f) = \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^\infty f(t) dX_t\right\}\right],$$

sofern die rechte Seite Sinn macht. Dieses Funktional heisst *Laplace-Funktional*. Für einen Punktprozess N ist $L_N(f) = \mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=1}^\infty f(T_k)\}]$, wobei T_k den Zeitpunkt des k -ten Ereignisses bezeichnet. Berechnen Sie das Laplace-Funktional des Poisson-Prozesses.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst Funktionen f mit $f(s) = 0$ für $s > t$ und bedingen Sie auf N_t . Verwenden Sie eine hilfreiche Definition des Poissonprozesses.