Lösung der Klausur

1. Sei $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{M}_b(\Omega) : \mu(f;A) = \tilde\mu(f;A)\}$. Der Raum $\mathcal{H}$ ist linear, da für $f,g \in \mathcal{H}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mu(\alpha f + g; A) &= \int (\alpha f + g)\mathbb{I}_A \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f\mathbb{I}_A \,\mathrm{d}\mu + \int g\mathbb{I}_A \,\mathrm{d}\mu \\ &= \alpha\mu(f;A) + \mu(g;A) = \alpha\tilde\mu(f;A) + \tilde\mu(g;A) \\ &= \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu_A + \int g \,\mathrm{d}\mu_A = \int (\alpha f + g)\,\mathrm{d}\mu_A = \tilde\mu(\alpha f + g; A)\;.\end{aligned}$$

Für eine konstante Funktion c haben wir

$$\mu(c;A) = \int c\mathbb{I}_A \,\mathrm{d}\mu = c\mu(A) = c\mu_A(\Omega) = \int c \,\mathrm{d}\mu_A = \tilde\mu(c;A)\;.$$

Somit enthält $\mathcal{H}$ die konstanten Funktionen. Sei $B \in \mathcal{F}$. Dann ist

$$\mu(\mathbb{I}_B;A) = \int \mathbb{I}_B\mathbb{I}_A \,\mathrm{d}\mu = \int \mathbb{I}_{B\cap A}\,\mathrm{d}\mu = \mu(A\cap B) = \mu_A(B) = \int \mathbb{I}_B \,\mathrm{d}\mu_A\;.$$

Somit enthält $\mathcal{H}$ die Indikatorfunktionen. Seien $f_n \in \mathcal{H}$ mit $f_n \le c$ und $f_1 \le f_2 \le f_3 \le \cdots$. Wir setzen $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Dann ist wegen der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned}\mu(f;A) &= \int f\mathbb{I}_A \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n\mathbb{I}_A\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\mu(f_n;A) = \lim_{n\to\infty}\tilde\mu(f_n;A) \\ &= \lim_{n\to\infty}\int f_n\,\mathrm{d}\mu_A = \int f\,\mathrm{d}\mu_A = \tilde\mu(f;A)\;.\end{aligned}$$

Somit enthält $\mathcal{H}$ auch die monotonen Grenzwerte. Aus dem monotonen Klassentheorem folgt nun, dass $\mathcal{H}$ alle beschränkten messbaren Funktionen enthält.

2. a) Nehmen wir an, dass es einen vorhersehbaren Prozess Z gibt. Dann ist

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{M_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n]\mathrm{e}^{-Z_{n+1}} = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{M_{n+1}-Z_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n] = \mathrm{e}^{M_n - Z_n}\;.$$

Also haben wir $Z_{n+1} = Z_n + \log\mathbb{E}[\mathrm{e}^{M_{n+1}-M_n} \mid \mathcal{F}_n]$, und damit

$$Z_n = \sum_{k=1}^n \log\mathbb{E}[\mathrm{e}^{M_k - M_{k-1}} \mid \mathcal{F}_{k-1}]\;. \tag{1}$$

Damit ist der Prozess, falls er existiert, eindeutig. Definieren wir Z mit (1). Dann ist Z vorhersehbar, $\{\mathrm{e}^{M_n - Z_n}\}$ adaptiert, und

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{M_{n+1}-Z_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\mathrm{e}^{M_{n+1}-M_n} \mid \mathcal{F}_n]\mathrm{e}^{M_n - Z_{n+1}} \\ &= \mathrm{e}^{M_n - (Z_{n+1} - \log\mathbb{E}[\mathrm{e}^{M_{n+1}-M_n} \mid \mathcal{F}_n])} = \mathrm{e}^{M_n - Z_n}\;.\end{aligned}$$

Da wir zeigen werden, dass Z wachsend ist, ist $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{M_n - Z_n}] \le \mathbb{E}[\mathrm{e}^{M_n}] < \infty$. Somit ist $\{\mathrm{e}^{M_n - Z_n}\}$ ein Martingal.

b) Mit Hilfe der Jensenschen Ungleichung und der Martingaleigenschaft erhalten wir

$$\begin{aligned}Z_{n+1} - Z_n &= \log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{M_{n+1}-M_n} \mid \mathcal{F}_n] \ge \mathbb{E}[\log \mathrm{e}^{M_{n+1}-M_n} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n] = 0 \;.\end{aligned}$$

Somit ist Z wachsend.

c) Aus dem Stoppsatz folgern wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{M_0}] &= \mathbb{E}[\mathrm{e}^{M_{T_x\wedge n}-Z_{T_x\wedge n}}] \ge \mathbb{E}[\mathrm{e}^{M_{T_x\wedge n}-Z_{T_x\wedge n}}; T_x \le n] \\ &= \mathbb{E}[\mathrm{e}^{M_{T_x}-Z_{T_x}}; T_x \le n] \ge \mathbb{E}[\mathrm{e}^{x-Z_{T_x}}; T_x \le n] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-Z_{T_x}}; T_x \le n]\mathrm{e}^x \;.\end{aligned}$$

Monotone Konvergenz ergibt

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{M_0}] \ge \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-Z_{T_x}}; T_x < \infty]\mathrm{e}^x = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-Z_{T_x}} \mid T_x < \infty]\mathbb{P}[T_x < \infty]\mathrm{e}^x \;.$$

Auflösen nach $\mathbb{P}[T_x < \infty]$ gibt

$$\mathbb{P}[T_x < \infty] \le \frac{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{M_0}]\mathrm{e}^{-x}}{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-Z_{T_x}} \mid T_x < \infty]} \;.$$

3. Nehmen wir an, dass $f(s) = 0$ für $s > t$. Seien $\{S_k\}$ unabhängige auf $[0, t]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Dann hat, bedingt auf $\{N_t = n\}$, die Ordnungsstatistik von $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ die gleiche Verteilung wie $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\exp\Big\{-\sum_{k=1}^{N_t} f(T_k)\Big\} \;\Big|\; N_t = n\Big] &= \mathbb{E}\Big[\exp\Big\{-\sum_{k=1}^{N_t} f(S_k)\Big\} \;\Big|\; N_t = n\Big] \\ &= (\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-f(S_1)}])^n \;.\end{aligned}$$

Wir haben

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-f(S_1)}] = \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}^{-f(s)}\,\mathrm{d}s \;.$$

Damit erhalten wir

$$L_N(f) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big(\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}^{-f(s)}\,\mathrm{d}s\Big)^n = \exp\Big\{\lambda \int_0^t (\mathrm{e}^{-f(s)} - 1)\,\mathrm{d}s\Big\} \;.$$

Für eine beliebige Funktion f haben wir mit monotoner Konvergenz

$$\begin{aligned}L_n(f) &= \lim_{t\to\infty} L_n(f\mathbb{1}_{[0,t]}) = \lim_{t\to\infty} \exp\Big\{\lambda\int_0^t (\mathrm{e}^{-f(s)} - 1)\,\mathrm{d}s\Big\} \\ &= \exp\Big\{\lambda\int_0^\infty (\mathrm{e}^{-f(s)} - 1)\,\mathrm{d}s\Big\} \;.\end{aligned}$$