

Nachklausur 21. März 2013

1. Wir betrachten den messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$, wobei $\mathcal{F}$ die Borel- σ -Algebra bezeichnet. Mit $\mathcal{P}$ bezeichnen wir die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmasse auf $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$. $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ ist die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$. Für $F \in \mathcal{F}$ setzen wir

$$F^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : \inf_{y \in F} |x - y| < \varepsilon\}$$

die ε -Umgebung von F . Wir definieren den Abstand zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsmassen

$$\rho(\mathbb{P}, \mathbb{P}') = \inf\{\varepsilon > 0 : \mathbb{P}[F] \leq \mathbb{P}'[F^\varepsilon] + \varepsilon \text{ für alle } F \in \mathcal{C}\}.$$

- a) Für $\mathbb{P}, \mathbb{P}' \in \mathcal{P}$ und $\alpha, \beta > 0$ sei $\mathbb{P}[F] \leq \mathbb{P}'[F^\alpha] + \beta$ für alle $F \in \mathcal{C}$. Zeigen Sie: $\mathbb{P}'[F] \leq \mathbb{P}[F^\alpha] + \beta$ für alle $F \in \mathcal{C}$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass $F_2 = \mathbb{R} \setminus F_1^\alpha \in \mathcal{C}$ für $F_1 \in \mathcal{C}$ und zeigen Sie, dass $F_1 \subset \mathbb{R} \setminus F_2^\alpha$.

- b) Schliessen Sie, dass $\rho(\mathbb{P}, \mathbb{P}') = \rho(\mathbb{P}', \mathbb{P})$.

- c) Zeigen Sie: Aus $\rho(\mathbb{P}, \mathbb{P}') = 0$ folgt, dass $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$.

- d) Zeigen Sie die Dreiecksungleichung $\rho(\mathbb{P}, \mathbb{P}'') \leq \rho(\mathbb{P}, \mathbb{P}') + \rho(\mathbb{P}', \mathbb{P}'')$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass $\overline{F^\varepsilon}^\delta = F^{\varepsilon+\delta}$.

2. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{\mathcal{F}_n\}$ eine Filtration. Sei $\mathbb{P}^*$ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{F})$, so dass die Masse $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_n}$ und $\mathbb{P}^*|_{\mathcal{F}_n}$ für alle n äquivalente Masse auf $\mathcal{F}_n$ sind. Zeigen Sie:

- a) Für jedes n gibt es eine Variable $L_n > 0$ mit $\mathbb{E}[L_n] = 1$, so dass $\mathbb{P}^*[A] = \mathbb{E}[L_n; A]$ für alle $A \in \mathcal{F}_n$.

- b) Der Prozess $\{L_n\}$ ist ein Martingal unter $\mathbb{P}$.

- c) Gilt $L_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 0$, so sind $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}^*$ singularär auf $\mathcal{F}$.

Hinweis: $\{L_\infty = 0\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} \{L_n \leq m^{-1}\}$. Verwenden Sie monotone Konvergenz unter $\mathbb{P}^*$.

- 3.** Sei $\{N_t\}$ ein gewöhnlicher Erneuerungsprozess mit $\lambda > 0$ und $\{\tilde{N}_t\}$ der entsprechende stationäre Erneuerungsprozess mit $F_1(x) = \lambda \int_0^x (1 - F(t)) dt$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[\tilde{N}_t] = \lambda \int_0^t U(t-s)(1-F(s)) ds = \int_{0-}^t \lambda \int_0^{t-v} (1-F(s)) ds dU(v) .$$

b) Schliessen Sie, dass $Z(t) = \mathbb{E}[\tilde{N}_t]$ die (gewöhnliche) Erneuerungsgleichung

$$Z(t) = \lambda \int_0^t (1-F(s)) ds + \int_0^t Z(t-s) dF(s)$$

erfüllt.

c) Schliessen Sie, dass $\mathbb{E}[\tilde{N}_t] = \lambda t$.