Lösung der Nachklausur

1. a) Wir zeigen zuerst den Hinweis (was nicht verlangt war). Wir müssen zeigen, dass F_1^α offen ist. Sei $x \in F_1^\alpha$. Dann ist $\beta = \inf_{y \in F_1} |x-y| < \alpha$. Sei $z \in \mathbb{R}$ mit $|z-x| < \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$. Es existiert $y_0 \in F_1$ mit $|x-y_0| < \beta + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

$$|z-y_0| \le |z-x| + |x-y_0| < \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) + \beta + \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \alpha\ .$$

Somit ist $\inf_{y\in F_1} |z-y| \le |z-y_0| < \alpha$, also $z \in F_1^\alpha$. Also ist F_1^α offen.

Sei $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{C}$ und $F_2 = \mathbb{R}\backslash F_1^\alpha$. Sei $x \in F_1$. Für $y \in F_2$ gilt dann nach Definition von F_2, $|x-y| \ge \alpha$. Also ist $\inf_{y\in F_2} |x-y| \ge \alpha$, und damit $x \in \mathbb{R} \setminus F_2^\alpha$. Damit erhalten wir

$$\mathbb{P}[F_1^\alpha] + \beta = 1 - \mathbb{P}[F_2] + \beta \ge 1 - \mathbb{P}'[F_2^\alpha] = \mathbb{P}'[\mathbb{R} \setminus F_2^\alpha] \ge \mathbb{P}'[F_1]\ .$$

b) Sei $\varepsilon > \rho(\mathbb{P}, \mathbb{P}')$ und $F \in \mathcal{C}$. Setzen wir $\alpha = \beta = \varepsilon$ in a), so folgt $\mathbb{P}'[F] \le \mathbb{P}[F^\varepsilon] + \varepsilon$. Somit ist $\rho(\mathbb{P}', \mathbb{P}) \le \varepsilon$. Da ε beliebig war, folgt $\rho(\mathbb{P}', \mathbb{P}) \le \rho(\mathbb{P}, \mathbb{P}')$. Vertauschen von $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}'$ ergibt $\rho(\mathbb{P}, \mathbb{P}') \le \rho(\mathbb{P}', \mathbb{P})$, was die Behauptung beweist.

c) Lassen wir $\varepsilon \downarrow 0$, so folgt mittels monotoner Konvergenz, dass $\mathbb{P}[F] \le \mathbb{P}'[F]$ und $\mathbb{P}'[F] \le \mathbb{P}[F]$ für alle $F \in \mathcal{C}$. Also ist $\mathbb{P}[F] = \mathbb{P}[F']$ für alle $F \in \mathcal{C}$. Da $\mathcal{C}$ die σ-Algebra $\mathcal{F}$ erzeugt, gilt $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}'[A]$ für alle $A \in \mathcal{F}$.

d) Wir zeigen zuerst den Hinweis (was nicht verlangt war). Sei $x \in \overline{F^\varepsilon}^\delta$ und $\gamma > 0$. Wir setzen $\beta = \inf_{y\in\overline{F^\varepsilon}} |x-y| < \delta$. Dann existiert ein $y_0 \in \overline{F^\varepsilon}$, so dass $|x-y_0| < \beta+\gamma$. Es gibt weiter ein $y_1 \in F^\varepsilon$, so dass $|y_1-y_0| < \gamma$. Es existiert $y_2 \in F$, so dass $|y_1-y_2| < \varepsilon+\gamma$. Wir haben nun

$$|x-y_2| \le |x-y_0| + |y_0-y_1| + |y_1-y_2| < (\beta+\gamma)+\gamma+(\varepsilon+\gamma) = (\beta+\varepsilon)+3\gamma\ .$$

Also ist $\inf_{y\in F} |x-y| \le |x-y_2| < (\beta+\varepsilon)+3\gamma$. Da γ beliebig war, ist $\inf_{y\in F} |x-y| \le \beta+\varepsilon < \delta+\varepsilon$. Dies zeigt, dass $x \in F^{\varepsilon+\delta}$. Insbesondere ist $\overline{F^\varepsilon}^\delta \subset F^{\varepsilon+\delta}$.

Sei $x \in F^{\varepsilon+\delta}$. Wir setzen $\beta = \max\{\inf_{y\in F} |x-y| - \varepsilon, \delta/2\} < \delta$. Dann existiert $y_0 \in F$, so dass $|x-y_0| < \varepsilon+\beta+\gamma$. Setzen wir $y_1 = y_0 + (\varepsilon+\beta+\gamma)^{-1}\varepsilon(x-y_0)$. Dann ist

$$|y_1-y_0| = |\varepsilon+\beta+\gamma|^{-1}\varepsilon|x-y_0| < \varepsilon\ .$$

Somit ist $y_1 \in F^\varepsilon \subset \overline{F^\varepsilon}$. Weiter ist

$$|x - y_1| = (1 - (\varepsilon + \beta + \gamma)^{-1}\varepsilon)|x - y_0| < \beta + \gamma \ .$$

Insbesondere ist $\inf_{y \in \overline{F^\varepsilon}} |x - y| \le |x - y_1| < \beta + \gamma$. Da γ beliebig war, folgt $\inf_{y \in \overline{F^\varepsilon}} |x - y| \le \beta < \delta$. Also ist $x \in \overline{F^\varepsilon}^\delta$. Da x beliebig war, ist $F^{\varepsilon+\delta} \subset \overline{F^\varepsilon}^\delta$, was den Hinweis beweist.

Sei $\varepsilon > \rho(\mathbb{P}, \mathbb{P}')$ und $\delta > \rho(\mathbb{P}', \mathbb{P}'')$. Sei $F \in \mathcal{C}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[F] \le \mathbb{P}'[F^\varepsilon] + \varepsilon \le \mathbb{P}'[\overline{F^\varepsilon}] + \varepsilon \le \mathbb{P}''[\overline{F^\varepsilon}^\delta] + \varepsilon + \delta = \mathbb{P}''[F^{\varepsilon+\delta}] + (\varepsilon + \delta) \ .$$

Somit ist $\rho(\mathbb{P}, \mathbb{P}'') \le \varepsilon + \delta$. Da ε und δ beliebig waren, folgt die Aussage.

2. a) Nach dem Satz von Radon-Nikodym existiert eine Dichte $L_n \ge 0$, so dass

$$\mathbb{P}^*[A] = \int_A L_n \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}[L_n; A] \ .$$

Weiter ist $\mathbb{E}[L_n] = \mathbb{E}[L_n; \Omega] = \mathbb{P}^*[\Omega] = 1$. Aus $\mathbb{P}^*[L_n = 0] = \mathbb{E}[L_n; L_n = 0] = 0$, folgt wegen der Äquivalenz der Masse, dass $\mathbb{P}[L_n = 0] = 0$. Dies ist die Behauptung.

b) Die Variable L_n ist integrierbar und $\mathcal{F}_n$-messbar. Sei $A \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$. Dann ist

$$\mathbb{E}[L_n \mathbb{1}_A] = \mathbb{P}^*[A] = \mathbb{E}[L_{n+1} \mathbb{1}_A] \ .$$

Da A beliebig war, gilt $L_n = \mathbb{E}[L_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$. Somit ist $\{L_n\}$ ein Martingal.

c) Da das Martingal $\{L_n\}$ positiv ist, existiert der Grenzwert L_∞ (unter $\mathbb{P}$). Wir haben $\mathbb{P}[L_\infty = 0] = 1$ und

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^*[L_\infty = 0] &= \mathbb{P}^*[\cap_m \cup_k \cap_{n \ge k} \{L_n \le m^{-1}\}] = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}^*[\cup_k \cap_{n \ge k} \{L_n \le m^{-1}\}] \\
&= \lim_{m\to\infty} \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}^*[\cap_{n \ge k} \{L_n \le m^{-1}\}] \le \lim_{m\to\infty} \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}^*[L_k \le m^{-1}] \\
&= \lim_{m\to\infty} \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[L_k; L_k \le m^{-1}] \le \lim_{m\to\infty} \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[m^{-1}; L_k \le m^{-1}] \\
&= \lim_{m\to\infty} \lim_{k\to\infty} m^{-1} \mathbb{P}[L_k \le m^{-1}] \le \lim_{m\to\infty} \lim_{k\to\infty} m^{-1} = 0 \ .
\end{aligned}$$

Wir haben verwendet, dass $\cup_k \cap_{n \ge k} \{L_n \le m^{-1}\}$ fallend in m und $\cap_{n \ge k} \{L_n \le m^{-1}\}$ steigend in k ist. Somit sind die beiden Masse singulär.

3. **a)** Wir bedingen auf das erste Ereignis. Dann startet in $\tilde{T}_1$ ein gewöhnlicher Erneuerungsprozess. Ist $\tilde{T}_1 > t$, dass ist $\tilde{N}_t = 0$. Ist $\tilde{T}_1 \le t$, dann ist $\mathbb{E}[\tilde{N}_t \mid \tilde{T}_1] = \mathbb{E}[1+N_{t-\tilde{T}_1} \mid \tilde{T}_1] = U(t-\tilde{T}_1)$, wobei wir für die Rechnung angenommen haben, dass $\{N_t\}$ und $\{\tilde{N}_t\}$ undabhängig sind. Also erhalten wir

$$\mathbb{E}[\tilde{N}_t] = \int_0^t U(t-s)\lambda(1-F(s))\,\mathrm{d}s + \int_t^\infty 0\lambda(1-F(s))\,\mathrm{d}s\;,$$

was die erste Gleichung zeigt. Durch Umformen erhalten wir

$$\begin{aligned}\lambda\int_0^t U(t-s)(1-F(s))\,\mathrm{d}s &= \lambda\int_0^t\int_{0-}^{t-s}\mathrm{d}U(v)(1-F(s))\,\mathrm{d}s\\ &= \lambda\int_{0-}^t\int_0^{t-v}(1-F(s))\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}U(v)\;.\end{aligned}$$

Dies ist die zweite Gleichung.

b) Die eindeutige Lösung der Erneuerungsgleichung ist

$$Z(t) = z * U(t) = \int_{0-}^t \lambda\int_0^{t-v}(1-F(s))\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}U(v) = \mathbb{E}[\tilde{N}_t]\;.$$

c) Setzen wir $Z(t) = \lambda t$ in der rechten Seite der Erneuerungsgleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}&\lambda\int_0^t(1-F(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t \lambda(t-s)\,\mathrm{d}F(s)\\ &\quad= \lambda\int_0^t(1-F(s))\,\mathrm{d}s + \lambda\int_0^t\int_s^t \mathrm{d}v\,\mathrm{d}F(s)\\ &\quad= \lambda\int_0^t(1-F(s))\,\mathrm{d}s + \lambda\int_0^t\int_0^v \mathrm{d}F(s)\,\mathrm{d}v\\ &\quad= \lambda\int_0^t(1-F(s))\,\mathrm{d}s + \lambda\int_0^t F(v)\,\mathrm{d}v = \lambda\int_0^t 1\,\mathrm{d}s = \lambda t\;.\end{aligned}$$

Somit erfüllt auch λt die Erneuerungsgleichung. Da die Lösung eindeutig ist, muss $\mathbb{E}[\tilde{N}_t] = \lambda t$ gelten.