Klausur 22. Juli 2014

1. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf $\mathbb{R}$ mit Verteilungsfunktion F_Y und F_X . Mit $\mathcal{F}$ bezeichnen wir die Borel- σ -Algebra auf $\mathbb{R}$. Mit $d(X, Y) = \sup_{A \in \mathcal{F}} |\mathbb{P}[X \in A] - \mathbb{P}[Y \in A]|$ bezeichnen wir die Variationsdistanz der beiden Variablen. Zeigen Sie:

- a) Es gibt Mengen B und $B' = \mathbb{R} \setminus B$, so dass

$$d(X, Y) = \mathbb{P}[X \in B] - \mathbb{P}[Y \in B] = \mathbb{P}[Y \in B'] - \mathbb{P}[X \in B'] .$$

Hinweis: $\mathbb{P}[X \in \cdot]$ und $\mathbb{P}[Y \in \cdot]$ sind zwei Masse auf $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$.

Seien nun X und Y absolutstetig (bezüglich dem Lebesgue-Mass) mit Dichten f_X beziehungsweise f_Y ,

- b) Zeigen Sie, dass man $B = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) \geq f_Y(x)\}$ wählen kann.
 c) Zeigen Sie,

$$d(X, Y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f_X(x) - f_Y(x)| dx .$$

2. Seien $\{Y_k\}$ iid mit $\mathbb{P}[Y_k = 1] = 1 - \mathbb{P}[Y_k = -1] = p > \frac{1}{2}$. Wir betrachten die Irrfahrt $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Zeigen Sie:

- a) Ist $L_n = \exp\{-rS_n - \theta(r)n\}$ ein Martingal, dann ist $\theta(r) = \log[(1-p)e^r + pe^{-r}]$.
 b) Es gibt genau eine Lösung $R > 0$ der Gleichung $\theta(R) = 0$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\theta(r)$ konvex ist.
 c) Unter dem Mass $\mathbb{P}'[A] = \mathbb{E}[e^{-RS_n}; A]$ ist $\{S_n\}$ eine Irrfahrt mit $\mathbb{P}'[Y_k = 1] = pe^{-R} < \frac{1}{2}$ (Somit konvergiert S_n unter $\mathbb{P}'$ gegen $-\infty$).
 d) Für $\tau_{-x} = \inf\{n > 0 : S_n = -x\}$ und $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt

$$\mathbb{P}[\tau_{-x} < \infty] = e^{-Rx} .$$

- 3.** Sei $\{N_t\}$ ein Poisson-Prozess mit Rate λ und $t > 0$ ein Zeitpunkt. Wir bezeichnen mit $\{T_k\}$ die Ereigniszeiten des Prozesses. Wir wollen die Summe $S_t = \sum_{k=1}^{N_t} e^{-rT_k}$ untersuchen.
- a) Berechnen Sie $\mathbb{E}[S_t]$.
 - b) Zeigen Sie, dass $S_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} S_t < \infty$ (fast sicher).
 - c) Hat S_∞ endliche Varianz?