Lösung der Klausur

1. a) Mit $\mu(A) = \mathbb{P}[X \in A]$ und $\nu(A) = \mathbb{P}[Y \in A]$ sind zwei Masse auf $\mathbb{R}$ definiert. Wir wissen (Hilfssatz 1.41), dass es $B \in \mathcal{F}$ und $B' = \mathbb{R} \setminus B$ gibt, so dass $\mu(A) \geq \nu(A)$ für alle messbaren $A \subset B$ und $\mu(A) \leq \nu(A)$ für alle messbaren $A \subset B'$. Sei $A \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X \in A] - \mathbb{P}[Y \in A] \\
&\qquad = \mathbb{P}[X \in A \cap B] + \mathbb{P}[X \in A \cap B'] - \mathbb{P}[Y \in A \cap B] - \mathbb{P}[Y \in A \cap B'] \\
&\qquad \leq \mathbb{P}[X \in A \cap B] - \mathbb{P}[Y \in A \cap B] \\
&\qquad \leq \mathbb{P}[X \in A \cap B] - \mathbb{P}[Y \in A \cap B] + \mathbb{P}[X \in A^c \cap B] - \mathbb{P}[Y \in A^c \cap B] \\
&\qquad = \mathbb{P}[X \in B] - \mathbb{P}[Y \in B] \;.
\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\mathbb{P}[Y \in A] - \mathbb{P}[X \in A] \leq \mathbb{P}[Y \in B'] - \mathbb{P}[X \in B'] \;.$$

Da

$$\mathbb{P}[Y \in B'] - \mathbb{P}[X \in B'] = \mathbb{P}[X \in B] - \mathbb{P}[Y \in B]$$

folgt die Aussage, da die obere Grenze damit angenommen wird.

b) Für B wie in der Aufgabe erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X \in A] - \mathbb{P}[Y \in A] &= \int_A (f_X(x) - f_Y(x))\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{A\cap B} (f_X(x) - f_Y(x))\,\mathrm{d}x \leq \int_B (f_X(x) - f_Y(x))\,\mathrm{d}x \;.
\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\mathbb{P}[Y \in A] - \mathbb{P}[X \in A] \leq \int_{B'} (f_Y(x) - f_X(x))\,\mathrm{d}x = \int_B (f_X(x) - f_Y(x))\,\mathrm{d}x \;.$$

Die Wahl $A = B$ zeigt, dass die rechte Seite angenommen wird, und damit die obere Grenze ist.

c) Wählen wir B wie oben, erhalten wir

$$\begin{aligned}
2d(X,Y) &= (\mathbb{P}[X \in B] - \mathbb{P}[Y \in B]) + (\mathbb{P}[Y \in B'] - \mathbb{P}[X \in B']) \\
&= \int_B (f_X(x) - f_Y(x))\,\mathrm{d}x + \int_{B'} (f_Y(x) - f_X(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_B |f_X(x) - f_Y(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{B'} |f_Y(x) - f_X(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f_X(x) - f_Y(x)|\,\mathrm{d}x \;.
\end{aligned}$$

2. a) Wir erhalten

$$1 = \mathbb{E}[L_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]/L_n = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-rY_{n+1}-\theta(r)} \mid \mathcal{F}_n] = (p\mathrm{e}^{-r} + (1-p)\mathrm{e}^{r})\mathrm{e}^{-\theta(r)}$$
$$= \mathrm{e}^{\log[(1-p)\mathrm{e}^r + p\mathrm{e}^{-r}] - \theta(r)} .$$

Daraus folgt die Behauptung.

b) Leiten wir $\theta(r)$ ab, erhalten wir

$$\theta'(r) = \frac{(1-p)\mathrm{e}^r - p\mathrm{e}^{-r}}{(1-p)\mathrm{e}^r + p\mathrm{e}^{-r}} = 1 - \frac{2p}{(1-p)\mathrm{e}^{2r} + p} .$$

Dies ist steigend in r. Somit ist $\theta(r)$ konvex. Alternativ kann man zweimal ableiten. Wir haben $\theta(0) = 0$ und $\theta'(0) = 1 - 2p < 0$. Weiter gilt $\lim_{r\to\infty} \theta(r) = \infty$. Somit gibt es genau eine Lösung $R > 0$ von $\theta(R) = 0$, da eine konvexe Funktion maximal zwei Nullstellen haben kann.

c) Seien $y_k \in \{1, -1\}$ und $s_n = \sum_{k=1}^n y_k$. Dann gilt

$$\mathbb{P}'[Y_k = y_k, 1 \le k \le n] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-RS_n}; Y_k = y_k, 1 \le k \le n]$$
$$= \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-Rs_n}; Y_k = y_k, 1 \le k \le n] = \prod_{k=1}^n \mathrm{e}^{-Ry_k}\mathbb{P}[Y_k = y_k] .$$

Somit sind die $\{Y_k\}$ unter $\mathbb{P}'$ unabhängig. Es gilt

$$\mathbb{P}'[Y_k = 1] = \mathrm{e}^{-R}p .$$

Da $1-p > p$ und $\mathrm{e}^R > \mathrm{e}^{-R}$ und $(1-p)\mathrm{e}^R + p\mathrm{e}^{-R} = 1$, muss $p\mathrm{e}^{-R} < \frac{1}{2} < (1-p)\mathrm{e}^R$ gelten. Man kann leicht ausrechnen, dass $p\mathrm{e}^{-R} = 1-p$.

d) Wir haben

$$\mathbb{P}[\tau_{-x} < \infty] = \mathbb{E}'[\mathrm{e}^{RS_{\tau_{-x}}}; \tau_{-x} < \infty] = \mathbb{E}'[\mathrm{e}^{-Rx}; \tau_{-x} < \infty] = \mathrm{e}^{-Rx} ,$$

da $\mathbb{P}'[\tau_{-x} < \infty] = 1$.

Alternativ konvergiert das Martingal gegen 0, da $S_n \to \infty$. Weiter ist das gestoppte Martingal $\{\mathrm{e}^{-RS_{\tau_{-x}\wedge n}}\}$ durch e^{Rx} beschränkt.Somit erhalten wir mit dem Stoppsatz und beschränkter Konvergenz

$$1 = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-RS_{\tau_{-x}}}] = \mathrm{e}^{Rx}\mathbb{P}[\tau_{-x} < \infty] ,$$

woraus die Aussage folgt.

3. a) Bedingen wir auf $N_t = n$, so haben die Ereigniszeiten $\{T_k\}$ die bedingte Verteilung von n geordneten iid auf $(0, t)$ gleichverteilten Variablen. Also

$$\mathbb{E}[S_t \mid N_t = n] = n\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}^{-rv}\,\mathrm{d}v = n\frac{1-\mathrm{e}^{-rt}}{rt} .$$

Für den unbedingten Erwartungswert erhalten wir

$$\mathbb{E}[S_t] = \sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t} n\frac{1-\mathrm{e}^{-rt}}{rt} = \lambda\frac{1-\mathrm{e}^{-rt}}{r} .$$

b) Lassen wir $t \to \infty$ erhalten wir mit monotoner Konvergenz $\mathbb{E}[S_\infty] = \lambda/r$.

c) Wir müssen untersuchen, ob $\mathbb{E}[S_\infty^2] < \infty$. Für das zweite Moment von S_t bedingen wir auf $\{N_t = n\}$, und betrachten die auf $(0, t)$ gleichverteilten Variable $\tilde{T}_k$. Dann ist

$$\mathbb{E}[S_t^2 \mid N_t = n] = n \operatorname{Var}[\mathrm{e}^{-r\tilde{T}_k}] + n^2 \frac{(1-\mathrm{e}^{-rt})^2}{r^2t^2} \;.$$

Die Varianz wird $\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}^{-2rv}\,\mathrm{d}v - (1-\mathrm{e}^{-rt})^2/(rt)^2 = (1-\mathrm{e}^{-2rt})/(2rt) - (1-\mathrm{e}^{-rt})^2/(rt)^2$. Damit erhalten wir wie oben

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_t^2] &= \lambda\Big[\frac{(1-\mathrm{e}^{-2rt})}{2r} - \frac{(1-\mathrm{e}^{-rt})^2}{r^2t} + \sum_{k=1}^\infty \frac{n}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}(1-\mathrm{e}^{-rt})^2)}{r^2t}\Big] \\
&= \lambda\Big[\frac{(1-\mathrm{e}^{-2rt})}{2r} - \frac{(1-\mathrm{e}^{-rt})^2}{r^2t} + \sum_{k=2}^\infty \frac{(1-\mathrm{e}^{-rt})^2}{(n-2)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{r^2t} \\
&\qquad + \frac{(1-\mathrm{e}^{-rt})^2}{r^2t}\Big] \\
&= \lambda\Big[\frac{(1-\mathrm{e}^{-2rt})}{2r} - \frac{(1-\mathrm{e}^{-rt})^2}{r^2t} + \frac{\lambda(1-\mathrm{e}^{-rt})^2}{r^2} + \frac{(1-\mathrm{e}^{-rt})^2}{r^2t}\Big] \;.
\end{aligned}$$

Lassen wir $t \to \infty$ erhalten wir mit monotoner Konvergenz

$$\mathbb{E}[S_\infty^2] = \frac{\lambda}{2r} + \frac{\lambda^2}{r^2} < \infty \;.$$

Somit ist die Varianz endlich.