Nachklausur 23. September 2014

1. **a)** Zeigen Sie, dass eine Beta-Verteilung $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ mit der Dichte

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

Erwartungswert $\alpha/(\alpha+\beta)$ und Varianz $\alpha\beta/(\{\alpha+\beta\}^2\{\alpha+\beta+1\})$ hat.
Hinweis: $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

Sei $p_0 \in (0,1)$ deterministisch, und p_{n+1} sei bedingt auf $\mathcal{F}_n$ $\mathrm{B}(10p_n, 10(1-p_n))$ verteilt, wobei $\mathcal{F}_n = \sigma(p_0, \ldots, p_n)$.

b) Zeigen Sie, dass $\{p_n\}$ ein Martingal ist.

c) Konvergiert $\{p_n\}$. Falls ja, bestimmen Sie die Verteilung von p_∞.

d) Bestimmen Sie den Varianz-Prozess von $\{p_n\}$.

2. Die Jahresergebnisse $\{Y_k\}$ eines Versicherungsvertrages seien unabhängig und identisch verteilt, mit $\mathbb{P}[Y_k < 0] > 0$ und $\mathbb{E}[Y_k] > 0$. Der Prozess $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^n Y_k$ bezeichnet den Überschuss eines Versicherungsportfolios zum Zeitpunkt n, wobei S_0 eine Konstante ist. Wir interessieren uns für die Ruinwahrscheinlichkeit

$$\psi(x) = \mathbb{P}\left[\inf_n x + \sum_{k=1}^n Y_k < 0 \;\middle|\; S_0 = x\right].$$

Der Zeitpunkt $\tau = \inf\{n \geq 0 : S_n < 0\}$ ($\inf \emptyset = \infty$) heisst Ruinzeitpunkt. Wir verwenden die natürliche Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

a) Zeigen Sie, dass $\psi(x)$ eine fallende Funktion ist.

b) Zeigen Sie, dass $\{\psi(S_{\tau\wedge n})\}$ ein Martingal ist (bezüglich der natürlichen Filtration), wobei $\psi(x) = 1$ für $x < 0$ und $\tau \wedge n = \min\{\tau, n\}$.

Wir definieren nun $\tau_a = \inf\{n : S_n \geq a\}$ für ein $a > x$ und $T = \tau \wedge \tau_a$.

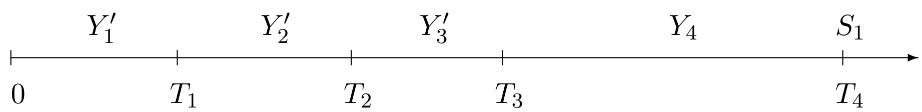
c) Begründen Sie, wieso $\mathbb{P}[T < \infty] = 1$.

d) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit a zu erreichen, bevor Ruin eintritt, die Ungleichung

$$\mathbb{P}[T = \tau_a \mid S_0 = x] \leq \frac{1-\psi(x)}{1-\psi(a)}$$

erfüllt.

3. Seien $\{Y_i\}$ exponentialverteilt mit Parameter β, $\{Y'_n\}$ exponentialverteilt mit Parameter β' und $\{Z_i\}$ habe die Verteilung $\mathbb{P}[Z_i = 1] = 1 - \mathbb{P}[Z_i = 0] = p \in (0,1)$. Alle Variablen seien unabhängig. Wir nehmen $\beta \neq \beta'$ an. Wir definieren $T_0 = 0$ und



$T_n = T_{n-1} + Z_n Y_n + (1 - Z_n) Y'_n$. Das heisst, der Zuwachs ist Y_n falls $Z_n = 1$ und Y'_n falls $Z_n = 0$. Mit $N_t = \sup\{n \in \mathbb{N} : T_n \leq t\}$ bezeichnen wir den Zählprozess. Wir bemerken, dass N kein Erneuerungsprozess ist. Betrachten wir die Zeitpunkte T_n, für die $Z_n = 1$, also $S_0 = 0$ und $S_n = \inf\{T_k > S_{n-1} : Z_k = 1\}$. Die Zeitpunkte $\{S_n\}$ nennt man Regenerationszeitpunkte. Zeigen Sie:

a) Nehmen wir $Z_1 = 0$ an und sei $S_1 = T_\ell$. Dann ist, bedingt auf $\{Z_1 = 0\}$, der Zeitpunkt $T_{\ell-1} = S_1 - Y_\ell$ das erste Ereignis eines Poisson-Prozesses mit Rate $\beta' p$.

b) $\{S_n\}$ ist ein Erneuerungsprozess mit Verteilung der Zwischenankuftszeiten

$$\tilde{F}(x) = \mathbb{P}[S_1 \leq x] = p(1 - \mathrm{e}^{-\beta x}) + (1-p) \int_0^x (1 - \mathrm{e}^{-\beta(x-y)}) \beta' p \mathrm{e}^{-\beta' p y} \, \mathrm{d}y \, .$$

Wir haben $\mathbb{E}[S_1] = \frac{1-p}{p\beta'} + \frac{1}{\beta}$.
Hinweis: Zur Berechnung von $\mathbb{E}[S_1]$ verwenden Sie <u>nicht</u> $\tilde{F}(x)$.

c) Die Variable Z_{N_t+1} ist 0, falls die momentane Zwischenankunftszeit exponential verteilt mit Parameter β' ist (dies brauchen Sie nicht zu zeigen). Die Funktion $Z(t) = \mathbb{P}[Z_{N_t+1} = 0]$ erfüllt die Erneuerungsgleichung

$$Z(t) = (1-p)\mathrm{e}^{-\beta' p t} + \int_0^t Z(t-y) \, \mathrm{d}\tilde{F}(y) \, .$$

d) Es gilt

$$\lim_{t \to \infty} Z(t) = \frac{(1-p)\beta}{p\beta' + (1-p)\beta} \, .$$