Lösung der Nachklausur

1. a) Das erste Moment wird

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)}\int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\;.\end{aligned}$$

Analog wird das zweite Moment

$$\int_0^1 x^2\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}\;.$$

Dies ergibt die Varianz

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \Bigl(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\Bigr)^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}\;.$$

b) Da p_n beschränkt ist, ist p_n integrierbar. Nach Definition der Filtration ist $\{p_n\}$ adaptiert. Bedingt auf $\mathcal{F}_n$ erhalten wir

$$\mathbb{E}[p_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \frac{10p_n}{10p_n + 10(1-p_n)} = p_n\;.$$

Somit ist $\{p_n\}$ ein Martingal.

c) Da das Martingal beschränkt ist, konvergiert es nach dem Konvergenzsatz. Sei $p \in (0,1)$. Dann konvergiert

$$\mathbb{P}[p_{n+1} \le p] = \int_0^p \frac{\Gamma(10)}{\Gamma(10p_n)\Gamma(10(1-p_n))}x^{10p_n-1}(1-x)^{10(1-p_n)-1}\,\mathrm{d}x$$

nach

$$\int_0^p \frac{\Gamma(10)}{\Gamma(10p_\infty)\Gamma(10(1-p_\infty))}x^{10p_\infty-1}(1-x)^{10(1-p_\infty)-1}\,\mathrm{d}x\;.$$

Dieser Wert ist echt positiv, falls $p_\infty \in (0,1)$. Somit muss nach dem verallgemeinerten Borel–Cantelli-Lemma $p_\infty = 1$ oder $\{p_n < p\}$ unendlich oft gelten. Analog ist $\mathbb{P}[p_{n+1} > p]$ echt positiv, falls $p_\infty \in (0,1)$, und damit gilt $p_\infty = 0$, oder $\{p_n > p\}$ unendlich oft. Das heisst, $p_\infty \in \{0,1\}$. Da $p_n \in (0,1)$, ist das Martingal gleichmässig integrierbar, und

$$p_0 = 1 \cdot \mathbb{P}[p_\infty = 1] + 0 \cdot \mathbb{P}[p_\infty = 0] = \mathbb{P}[p_\infty = 1] = 1 - \mathbb{P}[p_\infty = 0] \; .$$

d) Die bedingte Varianz von p_{n+1} ist

$$\operatorname{Var}[p_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \frac{10 p_n 10(1-p_n)}{10^2 \cdot 11} = \frac{p_n(1-p_n)}{11} \; .$$

Somit wird der Varianz-Prozess

$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k(1-p_k)}{11} \; .$$

2. **a)** Ist $x' > x$, so ist $S'_n = x' + \sum_{k=1}^n Y_k > S_n$, und damit erhalten wir $\tau' \ge \tau$. Somit ist $\psi(x') \le \psi(x)$.

b) Da $\psi \in [0,1]$ beschränkt ist, ist $\psi(S_{\tau\wedge n})$ integrierbar. Da $S_{\tau\wedge n}$ nur von $Y_1, Y_2, \dots, Y_{\tau\wedge n}$ abhängt, ist der Prozess auch adaptiert.

Ist $\tau \le n$, so ist $\psi(S_{\tau\wedge(n+1)}) = \psi(S_\tau) = 1 = \psi(S_{\tau\wedge n})$. Ist $\tau > n$, so erhalten wir auf $\{\tau > n\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\psi(S_{\tau\wedge(n+1)}) \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\psi(S_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\psi(S_n + Y_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{P}\Big[\inf_{k>n} S_n + Y_{n+1} + \sum_{\ell=n+2}^{k} Y_\ell < 0 \;\Big|\; \mathcal{F}_n\Big] \\
&= \mathbb{P}\Big[\inf_{k>n} S_n + \sum_{\ell=n+1}^{k} Y_\ell < 0 \;\Big|\; \mathcal{F}_n\Big] = \psi(S_n) \; .
\end{aligned}$$

Somit ist $\{\psi(S_{\tau\wedge n})\}$ ein Martingal.

c) Der Prozess $\sum_{k=1}^n Y_k$ ist eine Irrfahrt mit $\mathbb{E}[Y_k] > 0$ und konvergiert somit nach Unendlich. Somit ist $\tau_a < \infty$ und damit auch $T = \tau \wedge \tau_a < \infty$.

d) Nach dem Stoppsatz gilt

$$\psi(x) = \mathbb{E}[\psi(S_{T\wedge n})] = \mathbb{P}[T = \tau \le n] + \mathbb{E}[\psi(S_{\tau_a}) \mathbb{1}_{T=\tau_a \le n}] + \mathbb{E}[\psi(S_n) \mathbb{1}_{T>n}] \; .$$

Da $\psi(y)$ beschränkt ist, und $T < \infty$, folgt mit beschränkter Konvergenz

$$\psi(x) = \mathbb{P}[T = \tau] + \mathbb{E}[\psi(S_{\tau_a}) \mathbb{1}_{T=\tau_a}] \le (1 - \mathbb{P}[T = \tau_a]) + \psi(a)\mathbb{P}[T = \tau_a] \; ,$$

wobei wir verwendet haben, dass $\psi(S_{\tau_a}) \le \psi(a)$ da $S_{\tau_a} \ge a$. Lösen wir nach $\mathbb{P}[T = \tau_a]$ auf, erhalten wir

$$\mathbb{P}[T = \tau_a \mid S_0 = x] \le \frac{1 - \psi(x)}{1 - \psi(a)} \; .$$

3. **a)** Bis zum Zeitpunkt $T_{\ell-1}$ sind die Zwischenankunftszeiten exponential-verteilt mit Parameter β', danach ist Y_ℓ exponentialverteilt mit Parameter β. In $T_k < S_1$ losen wir aus, ob als nächstes die Zwischenzeit Y_{k+1} oder Y'_{k+1}. Somit stoppen wir mit Wahrscheinlichkeit p oder fahren fort mit Wahrscheinlichkeit $1-p$. Die entspricht im von $\{Y'_k\}$ erzeugten Poisson-Prozess einem Löschen des Ereignisses mit Wahrscheinlichkeit $1-p$, und Beibehalten mit Wahrscheinlichkeit p. Der entsprechende Prozess hat nach Hilfssatz 4.4 einem Poisson-Prozess mit Rate $p\beta'$, und $T_{\ell-1}$ ist das erste Ereignis.

b) Da alle Variablen unabhängig sind, folgen $\{Z_{\ell+k}\}$, $\{Y_{\ell+k}\}$ und $\{Y'_{\ell+k}\}$ dem gleichen Gesetz wie die ursprünglichen Variablen. Daher handelt es sich um einen Erneuerungsprozess.

Mit Wahrscheinlichkeit p ist $Z_1 = 1$, und damit $S_1 = T_1$. Damit haben wir $\mathbb{P}[S_1 \leq x \mid Z_1 = 1] = 1 - \mathrm{e}^{-\beta x}$. Mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ ist $Z_1 = 0$. Dann ist $T_{\ell-1}$ exponentialverteilt mit Parameter $\beta' p$ und Y_ℓ ist (bedingt auf $\{Z_0 = 0\}$) Exponentialverteilt mit Parameter β. Also müssen wir die beiden Verteilungen falten, also

$$\mathbb{P}[S_1 \leq x \mid Z_0 = 0] = \int_0^x (1 - \mathrm{e}^{-\beta(x-y)})\beta' p \mathrm{e}^{-\beta' p y} \,\mathrm{d}y \;.$$

Multiplizieren mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten ergibt die gesuchte Formel für $\tilde{F}(x)$. Für den Mittelwert, hat die Anzahl A der Variablen mit $Z_k = 0$ eine geometrische Verteilung mit $\mathbb{P}[A = k] = p(1-p)^k$, $k \in \mathbb{N}$. Gegeben A, ist der Mittelwert von S_1 $A/\beta' + 1/\beta$. Somit ist

$$\mathbb{E}[S_1] = \mathbb{E}[A]/\beta' + 1/\beta = \frac{1-p}{p\beta'} + \frac{1}{\beta} \;.$$

c) Ist $S_1 \leq t$, so suchen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{E}[Z(t-S_1) \mid S_1]$. Ist $S_1 > t$, so ist die gesuchte Grösse 1, falls $T_{\ell-1} > t$, und 0 sonst. Für dieses Ereignis muss $Z_1 = 0$ sein, und $T_{\ell-1} > t$. Letztere Variable ist exponentialverteilt mit Parameter $\beta' p$. Also erhalten wir die Erneuerungsgleichung

$$Z(t) = (1-p)\mathrm{e}^{-\beta' p t} + \int_0^t Z(t-y) \,\mathrm{d}\tilde{F}(y) \;.$$

d) Die Funktion $(1-p)\mathrm{e}^{-\beta' p t}$ ist monoton und integrierbar, und damit direkt Riemann integrierbar. Somit folgt aus dem Erneuerungstheorem

$$\lim_{t\to\infty} Z(t) = \frac{1}{\frac{1-p}{p\beta'} + \frac{1}{\beta}} \int_0^\infty (1-p)\mathrm{e}^{-\beta' p t} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\frac{1-p}{p\beta'} + \frac{1}{\beta}} \frac{1-p}{\beta' p} = \frac{(1-p)\beta}{p\beta' + (1-p)\beta} \;.$$