Klausur 22. Februar 2018

1. Seien $\{Y_n^{(k)} : n \in \mathbb{N}, k \in \{1,2,3\}\}$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[Y_n^{(k)} = 1] = \mathbb{P}[Y_n^{(k)} = -1] = \frac{1}{2}$. Wir setzen $S_n^{(k)} = \sum_{\ell=1}^n Y_\ell^{(k)}$. Der Prozess $\boldsymbol{S}_n = (S_n^{(1)}, S_n^{(2)}, S_n^{(3)})^\top$ heisst klassische Irrfahrt im Raum.

a) (3 P) Bestimmen Sie $\mathbb{P}[\boldsymbol{S}_{2n} = \mathbf{0} = (0,0,0)^\top]$.

b) (9 P) Zeigen Sie, dass die Irrfahrt $\mathbf{0}$ nur endlich oft besucht.
Hinweis: Die Stirlingformel lautet:

$$n! = n^{n+1/2} \mathrm{e}^{-n+\varepsilon_n} \sqrt{2\pi}\,, \qquad \frac{1}{12n+1} < \varepsilon_n < \frac{1}{12n}\,,$$

2. Seien $\{Y_n\}$ unabhänig und identisch verteilt mit $\mathbb{P}[Y_n = 1] = 1 - \mathbb{P}[Y_n = -1] = p \in (0,1)$. Wir betrachten die Irrfahrt $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ und verwenden die natürliche Filtration der $\{Y_k\}$. Weiter definieren wir die Stoppzeit $T = \inf\{n > 0 : S_n \in \{-a, b\}\}$ für $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

a) (2 P) Zeigen Sie: $\{S_n + (1-2p)n\}$ ist ein Martingal.

b) (4 P) Zeigen Sie: $\{(S_n + (1-2p)n)^2 - 4np(1-p)\}$ ist ein Martingal.

Sei nun $p \neq \frac{1}{2}$.

c) (4 P) Drücken Sie $\mathbb{E}[(T \wedge n)\{(T \wedge n) + \frac{2(1-2p)S_{T\wedge n} - 4p(1-p)}{(1-2p)^2}\}]$ mithilfe von $\mathbb{E}[S_{T\wedge n}^2]$ aus.

d) (2 P, schwierig) Folgern Sie, dass $\mathbb{E}[T^2] < \infty$.

3. Sei $\{N_t\}$ ein gewöhnlicher Erneuerungsprozess mit nicht-arithmetischen Zwischenankunftszeiten und $\lambda^{-1} = \mathbb{E}[T_1] < \infty$. Sei $A(t) = t - T_{N_t}$ die Zeit seit dem letzten Ereignis und $B(t) = T_{N_t+1} - t$ die Zeit bis zum nächsten Ereignis. Um die gemeinsame Verteilung von $A(t)$ und $B(t)$ zu untersuchen, betrachten wir $Z(t) = \mathbb{P}[A(t) > a, B(t) > b]$ für $a, b \geq 0$.

a) (5 P) Zeigen Sie, dass $Z(t)$ eine Erneuerungsgleichung erfüllt und bestimmen Sie $z(t)$.

b) (3 P) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} Z(t)$.
Hinweis: : Vergessen Sie nicht die Voraussetzungen zu überprüfen.

c) (4 P) Finden Sie die Verteilung F, so dass die Variablen $A(t)$ und $B(t)$ für grosse t unabhängig sind.
Hinweis: Für monotone Funktionen hat die Gleichung $f(t+s) = f(t)f(s)$ nur Exponentialfunktionen als Lösung.