Lösung der Klausur

1. a) Die eindimensionalen Irrfahrten $\{S_n^{(k)}\}$ sind unabhängig. Weiter muss in $\mathbf{0}$ $S_{2n}^{(k)} = 0$ für alle k gelten. Dies ist nur möglich, falls n der $Y_i^{(k)} = 1$ und n der $Y_i^{(k)} = -1$ sind. Somit erhalten wir

$$\mathbb{P}[\mathbf{S}_{2n} = \mathbf{0}] = \left(\binom{2n}{n} 2^{-2n} \right)^3.$$

- b) Mit der Stirling-Formel erhalten wir

$$\binom{2n}{n} 2^{-2n} = \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n+\varepsilon_{2n}} \sqrt{2\pi}}{2^{2n} (n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\varepsilon_n} \sqrt{2\pi})^2} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} e^{\varepsilon_{2n}-2\varepsilon_n}.$$

Somit ist

$$\mathbb{P}[\mathbf{S}_{2n} = \mathbf{0}] = \frac{1}{\sqrt{n^3\pi^3}} e^{3\varepsilon_{2n}-6\varepsilon_n}.$$

Der Exponentialterm konvergiert nach 1, und $n^{-3/2}$ ist summierbar. Somit tritt $\{\mathbf{S}_{2n} = \mathbf{0}\}$ nach dem Borel–Cantelli-Lemma nur endlich oft ein. Wir bemerken, dass $\mathbf{S}_{2n+1} = \mathbf{0}$ nicht möglich ist.

2. a) Da $|S_n| \leq n$, sind die Variablen integrierbar. Auch die Adaptiertheit folgt sofort aus der Definition. Wir haben

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{n+1} + (1-2p)(n+1) \mid \mathcal{F}_n] &= S_n + (1-2p)n + \mathbb{E}[Y_{n+1} + 1 - 2p] \\ &= S_n + (1-2p)n + p - (1-p) + 1 - 2p = S_n + (1-2p)n. \end{aligned}$$

Somit ist $\{S_n + (1-2p)n\}$ ein Martingal.

- b) Dass der Prozess integrierbar und adaptiert ist, folgt wie oben. Wir haben

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S_{n+1} + (1-2p)(n+1))^2 - (S_n + (1-2p)n)^2 \mid \mathcal{F}_n] \\ = \text{Var}[S_{n+1} + (1-2p)(n+1) \mid \mathcal{F}_n] = \text{Var}[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = 4p(1-p). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\mathbb{E}[(S_{n+1} + (1-2p)(n+1))^2 - 4p(1-p)(n+1) \mid \mathcal{F}_n] = (S_n + (1-2p)n)^2 - 4p(1-p)n,$$

was die Martingaleigenschaft beweist.

- c) Aus dem Stoppsatz erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}[(S_{T \wedge n} + (1-2p)(T \wedge n))^2 - 4p(1-p)(T \wedge n)] \\ &= \mathbb{E}[S_{T \wedge n}^2 + 2(1-2p)S_{T \wedge n}(T \wedge n) + (1-2p)^2(T \wedge n)^2 - 4p(1-p)(T \wedge n)] \\ &= \mathbb{E}[S_{T \wedge n}^2] + (1-2p)^2 \mathbb{E}\left[(T \wedge n) \left((T \wedge n) + \frac{2(1-2p)S_{T \wedge n} - 4p(1-p)}{(1-2p)^2} \right)\right]. \end{aligned}$$

Umformen ergibt

$$\mathbb{E}\left[(T \wedge n) \left((T \wedge n) + \frac{2(1-2p)S_{T \wedge n} - 4p(1-p)}{(1-2p)^2} \right)\right] = -\frac{1}{(1-2p)^2} \mathbb{E}[S_{T \wedge n}^2].$$

d) Für $p < \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\mathbb{E}\left[(T \wedge n)\left((T \wedge n) - \frac{2(1-2p)a + 4p(1-p)}{(1-2p)^2}\right)\right] \leq 0,$$

und für $p > \frac{1}{2}$

$$\mathbb{E}\left[(T \wedge n)\left((T \wedge n) - \frac{2(2p-1)b + 4p(1-p)}{(2p-1)^2}\right)\right] \leq 0.$$

Also, $\mathbb{E}[(T \wedge n)((T \wedge n) - \beta)] \leq 0$. Die linke Seite können wir nach unten abschätzen als $-\beta^2 + 0 + \frac{1}{2}\mathbb{E}[(T \wedge n)^2; T \wedge n \geq 2\beta]$, da entweder $T \wedge n < \beta$, $\beta \leq T \wedge n < 2\beta$ oder $T \wedge n \geq 2\beta$, und damit $(T \wedge n) - \beta > \frac{1}{2}(T \wedge n)$. Somit erhalten wir

$$\mathbb{E}[(T \wedge n)^2; (T \wedge n) \geq 2\beta] \leq 2\beta^2.$$

Mit monotoner Konvergenz folgt $\mathbb{E}[T^2; T \geq 2\beta] \leq 2\beta^2$, und damit $\mathbb{E}[T^2] \leq 4\beta^2 + 2\beta^2 = 6\beta^2 < \infty$.

3. a) Ist $T_1 \leq t$, so können wir $Z(t - T_1)$ betrachten. Ist $T_1 > t$, so ist $A(t) = t$ und $B(t) = T_1 - t$. Insbesondere müssen wir $t > a$ und $T_1 > t + b$ haben. Somit erhalten wir durch Bedingen auf T_1 ,

$$Z(t) = \mathbb{1}_{t > a}(1 - F(t + b)) + \int_0^t Z(t - s) dF(s).$$

Somit ist $z(t) = \mathbb{1}_{t > a}(1 - F(t + b))$.

- b) Die Funktion $z(t)$ ist fast überall stetig (nur abzählbar viele Sprünge) und $1 - F(t + b) \geq z(t)$ ist wegen $\mathbb{E}[T_1] < \infty$ integrierbar. Somit ist $z(t)$ direkt Riemann integrierbar. Für den Grenzwert erhalten wir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = \lambda \int_0^\infty \mathbb{1}_{t > a}(1 - F(t + b)) dt = \lambda \int_{a+b}^\infty (1 - F(s)) ds.$$

- c) Die asymptotische Randverteilung von $A(t)$, $B(t)$ ist $G(t) = \lambda \int_0^t (1 - F(s)) ds$ (auch in der Vorlesung bewiesen). Für Unabhängigkeit muss also gelten

$$\lambda \int_{a+b}^\infty (1 - F(s)) ds = \lambda \int_a^\infty (1 - F(s)) ds \lambda \int_b^\infty (1 - F(s)) ds.$$

Somit ist $\lambda \int_a^\infty (1 - F(s)) ds = e^{-ra}$ für ein $r > 0$, da der Ausdruck gegen Null konvergieren muss. Da es sich um die Flanke einer Verteilungsfunktion handelt, ist $r = \lambda$. Leiten wir nach a ab, erhalten wir $1 - F(a) = e^{-\lambda a}$. Also ist F eine Exponentialverteilung mit Parameter λ .