Nachklausur 21. März 2018

1. **a)** (4 P) Zeigen Sie, dass $F(x,y) = \mathbb{1}_{x+y\ge 0}$ keine 2-dimensionale Verteilungsfunktion ist.

b) (2 P) Zeigen Sie (ohne Verwendung des Hinweises), dass

$$\tilde H_\alpha(x,y) = xy\{1+\alpha(1-x)(1-y)\}\;, \qquad 0 \le x,y \le 1\;,$$

für $\alpha \in [-1,1]$ eine absolutstetige Verteilungsfunktion ist.

c) (2 P) Seien $F(x)$ und $G(y)$ eindimensionale Verteilungsfunktionen und $\alpha \in [-1,1]$. Zeigen Sie, dass

$$H_\alpha(x,y) = \tilde H_\alpha(F(x), G(y)) = F(x)G(y)\{1+\alpha(1-F(x))(1-G(y))\}$$

eine 2-dimensionale Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F bzw. G ist.

d) (4 P) Sei nun $F(x) = G(x) = \Phi(x)$. Zeigen Sie, dass $H_\alpha(x,y)$ genau dann eine 2-dimensionale Normalverteilung (d.h. $H_\alpha(x,y)$ eine Dichte $h_\alpha(x,y)$ der Form $h_\alpha(x,y) = C\exp\{-\frac12 (x,y)\Sigma^{-1}(x,y)^\top\}$ hat) ist, falls $\alpha = 0$.

Hinweis: Eine in beiden Variablen wachsende und rechtsstetige Funktion $F(x,y)$ ist genau dann eine Verteilungsfunktion, falls $F(b_1,b_2)+F(a_1,a_2)-F(b_1,a_2)-F(a_1,b_2) \ge 0$ für alle $a_1 \le b_1$ und $a_2 \le b_2$ (dürfen Sie ohne Beweis verwenden).

2. Seien $\{Y_k\}$ iid Variablen mit $\mathbb{P}[Y_k = 1] = 1 - \mathbb{P}[Y_k = -1] = p \in (0,1)$. Wir betrachten die Irrfahrt $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ mit der Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma\{Y_1,\dots,Y_n\}$. Sei $\alpha = \sqrt{(1-p)/p}$ und $\beta = 2\sqrt{p(1-p)}$. Wir betrachten den Prozess $L_n = \alpha^{S_n}\beta^{-n}$.

a) (4 P) Zeigen Sie, dass $\{L_n\}$ ein Martingal ist.

Wir betrachten das Mass $\mathbb{P}^*[A] = \mathbb{E}[L_n \mathbb{1}_A]$ auf $\mathcal{F}_n$.

b) (5 P) Zeigen Sie, dass unter $\mathbb{P}^*$ der Prozess $\{S_n\}$ eine Irrfahrt mit $p^* = \frac12$ ist.

Somit lässt sich das Mass auf $\mathcal{F}$ fortsetzen. Sei $T_a = \inf\{n > 0 : S_n = a\}$ für $a > 0$. Dann weiss man, dass $\mathbb{P}^*[T_a = n] = \binom{n}{(n+a)/2} 2^{-n}\frac{a}{n}$, falls $a+n$ gerade ist (dürfen Sie ohne Beweis verwenden).

c) (3 P) Berechnen Sie $\mathbb{P}[T_a = n]$ (für $a+n$ gerade).

3. Betrachten wir eine Irrfahrt mit Sprungverteilung

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac12 e^{-x}\;, & \text{falls } x \ge 0,\\ \frac12(1-x)e^{x}\;, & \text{falls } x \le 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Leiterhöhenverteilungen H_+ und H_-.