

Lösung der Nachklausur

1. a) Setzen wir $(a_1, a_2) = (-1, -1)$ und $(b_1, b_2) = (2, 2)$, dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 \in (-1, 2], X_2 \in (-1, 2]] \\ = F(2, 2) + F(-1, -1) - F(2, -1) - F(-1, 2) = 1 + 0 - 1 - 1 = -1 . \end{aligned}$$

Somit ist F keine Verteilungsfunktion.

- b) Die Ableitung nach x ist

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{H}_\alpha(x, y) = y\{1 + \alpha(1-x)(1-y)\} - \alpha xy(1-y) .$$

Leiten wir weiter nach y ab,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{H}_\alpha(x, y) &= 1 + \alpha(1-x)(1-y) - \alpha y(1-x) - \alpha x(1-y) + \alpha xy \\ &= 1 + \alpha(1-2x)(1-2y) . \end{aligned}$$

Da $1-2x \in [-1, 1]$, ist $|\alpha(1-2x)(1-2y)| \leq 1$ und damit $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{H}_\alpha(x, y) \geq 0$.
In der Tat ist für $x, y \in [0, 1]$

$$\int_0^x \int_0^y (1 + \alpha(1-2v)(1-2w)) \, dw \, dv = xy + \alpha(x-x^2)(y-y^2) = \tilde{H}_\alpha(x, y) .$$

Da der Integrand als stetige Funktion auch messbar ist, hat $\tilde{H}_\alpha(x, y)$ eine Dichte und ist damit eine Verteilungsfunktion.

- c) Lassen wir x bzw. y gegen Unendlich, so konvergieren $F(x)$ bzw. $G(y)$ nach 1 und damit H_α zur behaupteten Randverteilung.

Da x, y nur über $F(x)$ und $G(y)$ in die Funktion $H_\alpha(x, y)$ eingehen und wachsend sind, und wegen der Stetigkeit und der Monotonie $H_\alpha(x, y)$ genau dann rechtsstetig ist, wenn F und G rechtsstetig sind, reicht es, das Kriterium des Hinweises für $F(x) = G(x) = x$ zu überprüfen. Wir haben aber in b) gezeigt, dass es sich in diesem Fall um eine Verteilung handelt, so dass das Kriterium des Hinweises erfüllt ist.

d) Sei $\varphi(x)$ die Dichte der Normalverteilung. Dann ist die Dichte von $H_\alpha(x, y)$

$$h_\alpha(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)\{1 + \alpha(1 - 2\Phi(x))(1 - 2\Phi(y))\} .$$

Ist $\alpha = 0$, so ist $h_0(x, y) = (2\pi)^{-1} \exp\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\}$ die Dichte einer Normalverteilung. Für eine 2-dimensionale Normalverteilung muss der Logarithmus von $h_\alpha(x, y)$ eine quadratische Funktion sein. Wir haben

$$\log h_\alpha(x, y) = \log \varphi(x) + \log \varphi(y) + \log\{1 + \alpha(1 - 2\Phi(x))(1 - 2\Phi(y))\} .$$

Da $\log \varphi(x)$ eine quadratische Funktion ist, muss $\log\{1 + \alpha(1 - 2\Phi(x))(1 - 2\Phi(y))\}$ eine quadratische Funktion sein. Lassen wir $x \rightarrow \infty$, konvergiert dies nach $\log\{1 - \alpha(1 - 2\Phi(y))\}$. Dies ist für eine quadratische Funktion nur möglich, falls die Funktion konstant ist. Dies ist aber offensichtlich nur der Fall, falls $\alpha = 0$.

2. a) $\{S_n\}$ ist adaptiert, und da $|S_n| \leq n$ auch integrierbar. Wir erhalten

$$\mathbb{E}[L_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \frac{\alpha^{S_n}}{\beta^{n+1}} \mathbb{E}[\alpha^{Y_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n] = \frac{\alpha^{S_n}}{\beta^{n+1}} (p\alpha + (1-p)\alpha^{-1}) = \frac{\alpha^{S_n}}{\beta^{n+1}} \beta = L_n .$$

Somit ist $\{L_n\}$ ein Martingal.

b) Da $L_n > 0$ und $\mathbb{E}[L_n] = 1$ lässt sich mit $\{L_n\}$ das Mass ändern. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $y_k \in \{1, -1\}$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^*[Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n] &= \mathbb{E} \left[\alpha^{\sum_{k=1}^n Y_k} \beta^{-n} \prod_{k=1}^n \mathbb{1}_{Y_k=y_k} \right] \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\alpha^{Y_k} \beta^{-1} \mathbb{1}_{Y_k=y_k}] . \end{aligned}$$

Somit sind die $\{Y_k\}$ iid unter $\mathbb{P}^*$. Wir erhalten

$$\mathbb{P}^*[Y_k = 1] = \mathbb{E}[\alpha^{Y_k} \beta^{-1} \mathbb{1}_{Y_k=1}] = \frac{\alpha}{\beta} \mathbb{P}[Y_k = 1] = p \frac{\sqrt{(1-p)/p}}{2\sqrt{p(1-p)}} = \frac{1}{2} .$$

Daher gilt $\mathbb{P}^*[Y_k = 1] = \mathbb{P}^*[Y_k = -1] = \frac{1}{2}$.

c) Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T_a = n] &= \mathbb{E}[L_n^{-1} \mathbb{1}_{T_a=n} L_n] = \mathbb{E}^*[\beta^n \alpha^{-S_n} \mathbb{1}_{T_a=n}] = \frac{\beta^n}{\alpha^a} \mathbb{P}^*[T_a = n] \\ &= \frac{a\beta^n}{n\alpha^a} \binom{n}{(n+a)/2} 2^{-n} = \frac{a(1-p)^{(n-a)/2} p^{(n+a)/2}}{n} \binom{n}{(n+a)/2} \\ &= \frac{a}{n} \mathbb{P}[S_n = a] . \end{aligned}$$

3. Der Mittelwert der Sprünge wird

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-x} dx - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}(1-x)e^x dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}e^x dx = -\frac{1}{2}.$$

Man hätte dies auch daraus folgern können, dass negative Werte (bedingt) Gamma-verteilt mit Mittelwert 2 sind und positive Werte (bedingt) exponentialverteilt mit Mittelwert 1 sind. Wir haben also den Fall $H_+(\infty) < 1$, da $\mathbb{E}[X] < 0$. Die Dichte der Verteilung wird

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{falls } x \geq 0, \\ \frac{1}{2}(-x)e^x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Somit erhalten wir für die Momentenerzeugendenfunktion

$$M_X(r) = \frac{1}{2(1+r)^2} + \frac{1}{2(1-r)}, \quad -1 < r < 1.$$

Die Gleichung $M_X(r) = 1$ kann geschrieben werden als

$$0 = 1 - r + (1+r)^2 + 2(r-1)(1+r)^2 = 2r^3 + 3r^2 - r,$$

Diese hat die Lösungen $r_0 = 0$, $r_{1/2} = (-3 \pm \sqrt{17})/4$. Da $r_2 < -1$, suchen wir die Lösung $R = r_1 = (\sqrt{17} - 3)/4$, und damit $H_+(\infty) = 1 - R = (7 - \sqrt{17})/4$. Damit haben wir

$$H_+(x) = \frac{7 - \sqrt{17}}{4}(1 - e^{-x})\mathbb{I}_{\{x>0\}}.$$

Weiter erhalten wir für $x \leq 0$

$$\begin{aligned} H_-(x) &= \frac{1}{2R}(1-x)e^x - \frac{1-R}{2R}e^{-Rx} \int_{-\infty}^x e^{Ry}(-y)e^y dy \\ &= \frac{1}{2R}(1-x)e^x - \frac{1-R}{2R}e^x \frac{1-x-Rx}{(1+R)^2} \\ &= \frac{1}{2R}(1-x)e^x - \frac{1-R}{2R}e^x(1-x-Rx) \left(2 - \frac{1}{1-R}\right) \\ &= \frac{1-x-(1-x-Rx)(1-2R)}{2R}e^x = \frac{2-(2R+1)x}{2}e^x. \end{aligned}$$

Für $x > 0$ ist $H_-(x) = H_-(0) = 1$.